Math. A. 328 s
178

Faber

Re 13.

Fa F P Po

königl. Lieut

<36629084520010

<36629084520010

Bayer. Staatsbibliothek

K e β 6

Gaspard Monge's

Anfangsgründe der Statik.

Aus dem Französischen übersetzt
und
mit Erläuterungen versehen
von

E. M. Hahn,
Königl. Preuß. Kammerkondukteur.

Mit 5 Kupfern.

Berlin, 1806.
In der Frölichschen Buchhandlung.

Gd / 69 / 636
Bayerische Staatsbibliothek München

Sr. Hochwohlgebohren

dem Herrn

Carl Wilh. von Bismark,

Königl. Preuß. Geheimen Ober-Finanzrath und Kammer-Vice-Präsidenten, wie auch Präsidenten der Königl. Krieges- und Domainenkammer Justiz-Deputation zu Breslau ꝛc.

aus

Ehrfurcht und innigster Dankbarkeit

gewidmet

vom Uebersetzer.

Bayerische Staatsbibliothek München

3
Copy
1
16
5 3

Vorrede.

Wenn es auch bey einer Erfahrungswissenschaft zweckmäßig seyn mag einen speziellen Fall zu untersuchen, und von diesem zu den allgemeinen Fällen überzugehen, so hat es unstreitig bey einer Erfahrungswissenschaft einen weit ausgebreiteteren Nutzen, die Wahrheiten derselben auf eine allgemeine Art darzuthun, da sich dann alle besondre Fälle daraus herleiten lassen. Kostet es auch den Anfänger etwas mehr Anstrengung, diese allgemeinen Untersuchungen zu fassen als jene besondre, so findet er sich doch hinlänglich entschädigt, wenn er mit dem Beweise des vorgetragenen Satzes öfter eine Menge andrer bewiesen sieht, deren jeder auf dem entgegesetzten Wege eines besondern Beweises bedürfen würde. Von dieser Oekonomie gereitzt, wird er zu neuen Untersuchungen angefeuert, und sein Verstand verliert hierdurch jene Einseitigkeit, an welche die entgegengesetzte Methode nur allzu sehr gewöhnt.

Freylich aber müssen dergleichen Untersuchungen nach den Kräften der Leser, für welche sie be-

Bayerische Staatsbibliothek München

stimmt sind, abgemessen seyn; und soll ein Lehrbuch allgemein brauchbar seyn, so müssen die Lehren desselben, wenn auch allgemein, doch möglichst elementar vorgetragen werden. Die Richtigkeit dieser Behauptung scheint mein würdiger mir stets unvergeßlicher Lehrer, der Herr Geheime Oberbaurath Eytelwein bey Abfassung seines Handbuchs der Mechanik und Hydraulik empfunden zu haben, wenn er in dessen Vorrede sagt:

„Noch darf sich der Mathematiker nicht schmei„cheln, von dem größten Theile derjenigen, welche „von seinen Untersuchungen Gebrauch machen könn„ten, verstanden zu werden.“

Dieses Bedürfniß hat vermuthlich den Verfasser gegenwärtiger Anfangsgründe der Statik bewogen, selbige bey der darin anzutreffenden Allgemeinheit, doch mit gänzlicher Vermeidung der Algebra, vorzutragen. Ob übrigens dieser Zweck ohne Nachtheil erreicht ist, und ob diese Anfangsgründe ihrer Vollständigkeit und Leichtfaßlichkeit wegen vor andern Lehrbüchern dieser Wissenschaft vorgezogen zu werden verdienen, mögen Kenner entscheiden.

Berlin, im July 1806.

Hahn.

Inhalt.

Seite

Erklärungen — — — — — — 1

Erstes Kapitel.

Von der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte 4

Zweites Kapitel.

Von den Momenten — — — — — 38

Drittes Kapitel.

Vom Schwerpunkte — — — — — 66

Viertes Kapitel.

Vom Gleichgewichte der Kräfte an Maschienen — 99

Vom Gleichgewichte der Kräfte, welche aufeinander vermittelst Seile wirken — — — — 101

Vom Gleichgewichte am Hebel — — — — 111

Von den Rollen und Flaschenzügen — — — 122

Vom Rade an der Welle — — — — 130

Seit.

Von den Räderwerken — — — — — 139

Von der Hebewinde — — — — — 143

Fünftes Kapitel.

Vom Gleichgewichte auf der schiefen Ebne — — 145

Von der Schraube — — — — — 160

Vom Keil — — — — — — — 168

Zusätze — — — — — — — 178

Anfangs=

Anfangsgründe der Statik.

Erklärungen.

Ein **Körper** oder eine materielle Substanz heißt alles, was unsre Sinne afficiren kann.

Die Körper werden eingetheilt in feste und flüßige. Ein Körper ist fest, wenn die ihn zusammensetzenden kleinen Theilchen zusammenhängend sind, und nur durch eine merkliche Kraft von einander getrennt werden können; von dieser Art sind die Metalle, die Steine, die Hölzer ꝛc. Wenn im Gegentheile die ihn zusammensetzenden kleinen Theilchen mit der größten Leichtigkeit von einander getrennt werden können, so heißt er flüßig. Von dieser Gattung sind das Wasser, die Luft ꝛc.

Alle Körper sind beweglich, das heißt, sie können von einem Orte in einen andern gebracht werden. Man sagt ein Körper sey in **Ruhe**, wenn alle ihn zusammensetzenden Theile in einerley Ort verharren; und er ist in **Bewegung**, wenn er seine Stelle ändert, oder wenn die ihn zusammensetzenden Theile von einem Orte in einen andern übergehen.

Wenn ein Körper in Ruhe ist, so kann er nicht in Bewegung kommen, und wenn er in Bewegung ist, so kann er weder die Bewegung noch die Richtung der Bewegung ändern, ohne die Einwirkung irgend einer Ursache, welche man überhaupt mit dem Nahmen **Kraft** belegt.

Bey einer Kraft bemerken wir

1) ihre **Größe**, das heißt das Bestreben, welches sie auf den Körper oder den Punkt des Körpers, an welchem sie angebracht ist, ausübt, um ihn in Bewegung zu setzen.

2) Ihre **Richtung**, d. i. die gerade Linie, nach welcher sie den Punkt des Körpers, auf welchen sie unmittelbar wirkt, zu bewegen strebt.

Wenn mehrere Kräfte auf einen und denselben Körper wirken, so können sich zwey Fälle zutragen: entweder wirken diese Kräfte einander entgegen und heben sich wechselseitig auf, alsdann sagt man, daß sie im **Gleichgewichte** sind, und der Körper bleibt in Ruhe; oder der Körper kommt vermittelst der Einwirkung aller Kräfte in Bewegung.

Hiernächst nennt man **Mechanik** die Wissenschaft, welche zum Zwecke hat, den Effekt kennen zu lernen, welchen überhaupt die Anwendung bestimmter Kräfte auf einen Körper hervorbringen muß. Diese Wissenschaft zerfällt in zwey Theile; der erste betrachtet die Verhältnisse, welche die Kräfte in ihrer Größe und Richtung zu einander haben müssen, um im Gleichgewichte zu seyn, und man nennt ihn die **Statik**; der zweyte, welchen man mit dem Nahmen der **Dynamik** belegt, untersucht die Art, nach welcher sich ein

Körper bewegt, wenn diese Kräfte einander nicht gänzlich aufheben.

Jeder dieser Theile zerfällt wiederum in zwey andre, je nachdem der Körper, an welchem man sich die Kräfte angebracht denkt, fest oder flüßig ist. Der Theil der Statik, welcher vom Gleichgewicht der an festen Körpern angebrachten Kräfte handelt, wird die Statik fester Körper oder schlechtweg Statik genannt; und man nennt denjenigen die Hydrostatik, welcher das Gleichgewicht der Kräfte zum Zwecke hat, die auf verschiedene Theile einer flüßigen Masse wirken.

Wir wollen uns in diesen Anfangsgründen nur mit dem ersten dieser beyden Theile, das heißt mit der eigentlichen Statik beschäftigen:

Erstes Kapitel.

Von der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

§. 1.

Wenn eine an einem bestimmten Punkte C eines festen Körpers AB Fig. 1. 2. angebrachte Kraft P, diesen Körper nach irgend einer Richtung CF zieht oder drückt: so ist es verstattet diese Kraft so anzusehen, als wäre sie an jedem andern auf der Richtung dieser Kraft genommenen Puncte D dieses Körpers unmittelbar angebracht.

Denn da alle Punkte des Körpers, welche auf der Geraden CF liegen, weder einander nähern noch sich von einander entfernen können, so kann sich keiner derselben nach dieser Geraden bewegen, ohne zugleich alle übrige auf eben die Art zu bewegen, als wenn die Kraft an ihnen unmittelbar angebracht wäre.

Es ist selbst verstattet, die Kraft P so zu betrachten, als wäre sie an jedem andern außerhalb des Körpers genommenen Punkt G dieser Richtung angebracht, wofern dieser Punkt mit dem Körper unveränderlich verbunden ist.

§. 2.

Hieraus folgt, daß wenn sich in der Richtung der

Kraft P entweder innerhalb des Körpers ein fester Punkt D, oder außerhalb ein unbewegliches Hinderniß G vorfindet, diese Kraft aufgehoben und der Körper in Ruhe bleiben wird, wofern nur im letztern Fall das Hinderniß mit dem Körper in unveränderlicher Verbindung steht; denn man kann diese Kraft als an dem festen Punkte unmittelbar angebracht betrachten, und ihr Effekt wird durch den Widerstand dieses Punktes vernichtet.

§. 3.

Umgekehrt, wenn die an dem Körper AB angebrachte Kraft P durch den Widerstand eines einzigen festen Punktes aufgehoben wird, so muß dieser Punkt in der Richtung dieser Kraft liegen; denn dieser Punkt kann die Wirkung der Kraft nur dann aufheben, wenn er der Bewegung des Punktes C, an welchem sie angebracht ist, entgegen wirkt; und diese Bewegung kann er nicht anders verhindern, als wenn er sich auf der Geraden befindet, nach welcher die Kraft den Punkt, an welchem sie angebracht ist, zu bewegen strebt.

Grundsätze.

I.

§. 4.

Ein Punkt kann nicht durch verschiedene Wege zugleich gehen.

§. 5.

Wenn also mehrere Kräfte zu gleicher Zeit auf einen und denselben Punkt nach verschiedenen Richtungen wirken, so wird dieser Punkt entweder in Ruhe bleiben,

oder sich auf einen einzigen Weg und folglich auf dieselbe Art bewegen, als wenn er von einer einzigen Kraft, die desselben Effekts fähig ist, nach derselben Richtung gedrückt oder gezogen worden wäre.

§. 6.

So groß also auch immer die Anzahl, und so verschieden auch die Richtungen der auf einen Punkt wirkenden Kräfte seyn mögen, so giebt es immer eine einzige Kraft, die ihn auf eben die Art wie alle diese Kräfte zusammen bewegt oder zu bewegen strebt; diese einzige Kraft wird die aus den ersten zusammen gesetzte Kraft genannt, und jene werden in Rücksicht dieser die zusammensetzenden oder die einfachen Kräfte genannt.

Die Operation, nach welcher man die aus mehreren gegebenen einfachen Kräften zusammengesetzte sucht, heißt die Zusammensetzung der Kräfte; und die, durch welche man die einfachen findet, wenn man die zusammengesetzte kennt, heißt die Zerlegung der Kräfte.

II.

§. 7.

Zwey gleiche an einem und demselben Punkte in einerley Zeit einander gerade entgegenwirkende Kräfte heben einander auf, und sind im Gleichgewicht.

Und umgekehrt, wenn zwey auf einen Punkt wirkende Kräfte einander das Gleichgewicht halten, so sind sie einander gleich und gerade entgegengesetzt.

§. 8.

Wenn also mehrere Kräfte nach verschiedenen Richtungen auf einen Punkt wirken, so muß man, um ihnen das Gleichgewicht zu halten, das heißt, um den Effekt der aus ihnen zusammen gesetzten Kraft aufzuheben, an diesem Punkte eine dieser Zusammengesetzten gleiche und gerade entgegen wirkende Kraft anbringen; oder man muß mehrere Kräfte anbringen, deren zusammengesetzte der aus den erstern zusammengesetzten gleich und gerade entgegen gesetzt ist.

§. 9.

Umgekehrt, wenn mehrere an einem und demselben Punkte nach verschiedenen Richtungen wirkende Kräfte einander das Gleichgewicht halten, so muß die aus ihnen zusammengesetzte Kraft Null seyn, oder, welches auf eins hinaus kommt, irgend eine derselben muß der aus allen übrigen erfolgenden zusammengesetzten gleich und gerade entgegengesetzt seyn; oder endlich, die aus irgend einer Anzahl derselben erfolgende Zusammengesetzte muß der aus den übrigen erfolgenden Zusammengesetzten gleich und gerade entgegengesetzt seyn.

III.

§. 10.

Wenn mehrere an einerley Punkt angebrachte Kräfte stets nach einerley Richtung wirken, so bringen sie auf diesen Punkt denselben Effekt hervor, als eine einzige Kraft, welche ihrer Summe gleich ist und nach derselben Richtung wirkt; mithin ist diese einzige Kraft die aus ihnen Zusammengesetzte.

§. 11.

Um also allen diesen Kräften das Gleichgewicht zu halten, muß man an denselben Punkt nach gerade entgegengesetzter Richtung eine ihrer Summe gleiche Kraft anbringen; denn diese Kraft wird der aus ihnen erfolgenden zusammengesetzten gleich und gerade entgegengesetzt seyn.

§. 12.

Hieraus folgt, 1) daß wenn zwey ungleiche Kräfte auf einen und denselben Punkt nach gerade entgegengesetzter Richtung wirken, die aus ihnen erfolgende Zusammengesetzte nach der Richtung der größern wirken und ihrer Differenz gleich seyn wird. Denn die größere derselben kann als eine aus zweyen andern mit ihr nach einerley Richtung wirkenden Kräften Zusammengesetzte angesehen werden, von denen eine der kleinern, und die andre der Differenz gleich ist; nun wird die erste dieser beyden Kräfte von der kleinern vernichtet (§. 7.); es bleibt also zur Bewegung des Punktes nur noch die Differenz übrig, welche mit der größern nach einerley Richtung wirkt.

§. 13.

2) Daß wenn von was immer für einer Anzahl auf einen Punkt wirkender Kräfte, einige nach der einen Richtung, die übrigen aber nach der gerade entgegengesetzten Richtung wirken, die aus allen erfolgende zusammengesetzte Kraft gefunden wird, wenn man die Summe der erstern, dann die der andern sucht, und die Differenz dieser beyden Summen nimmt (§. 12.); die Differenz

giebt die zusammengesetzte Kraft, deren Wirkung also nach der Richtung der größern Summe erfolgen wird.

§. 14.

Um also zwischen allen diesen Kräften das Gleichgewicht herzustellen, muß man nach der Richtung der kleinern von beyden Summen eine der Differenz dieser Summen gleiche Kraft anbringen. Denn diese Kraft wird der aus ihnen zusammengesetzten gleich und gerade entgegen gesetzt seyn.

Lehrsatz.

§. 15.

Wenn an den Endpunkten einer unbiegsamen Geraden AB Fig. 3. zwey gleiche Kräfte P und Q angebracht sind, deren Richtungen AP, BQ einander parallel sind, und nach einerley Seite wirken, so ist

1) die Richtung der aus ihnen zusammengesetzten Kraft den Geraden AP, BQ parallel und geht durch die Mitte von AB.

2) Diese zusammengesetzte Kraft ist der Summe P + Q beyder Kräfte gleich.

Beweis.

Erster Theil.

Es sey eine andre unbiegsame DE auf den Richtungen beyder Kräfte senkrecht, und mit der Geraden AB unveränderlich verbunden; es seyen ferner die Richtungen der beyden Kräfte P und Q so weit verlängert, bis sie diese Gerade in den Punkten D und E schneiden; so

kann man annehmen, daß diese beyden Kräfte in den Punkten D und E angebracht sind. Dieses vorausgesetzt, sey DE im Punkte C in zwey gleiche Theile getheilt, und es sey ferner in C zu der Seite, nach welcher die Kräfte diese gerade Linie zu bewegen streben, ein unüberwindliches Hinderniß angebracht; es ist klar, daß die Gerade DE keine Bewegung annehmen kann; denn da alle Umstände auf beyden Seiten des Hindernisses C einerley sind, so müßte aus eben dem Grunde, daß die eine Kraft eine Bewegung hervorbringen sollte, die andre eine Bewegung nach derselben Seite hervorbringen, und beyde zugleich können sich wegen des Hindernisses nicht nach einerley Seite bewegen; die aus den Kräften P und Q zusammengesetzte Kraft wird also vom Hinderniß C aufgehoben, und die Richtung dieser zusammengesetzten geht mithin durch den Punkt C (§. 3.). Wenn man aber eine andre unbiegsame Gerade GH der DE parallel führte, und in G, H auf den Richtungen der beyden Kräfte P und Q endigte; so könnte man ebenfalls beweisen, daß die Richtung der aus diesen beyden Kräften entspringenden zusammengesetzten durch die Mitte I dieser Geraden gehen muß; nun geht diese Richtung zu gleicher Zeit durch die beyden Punkte C, I; sie ist also von denen der beyden Kräfte P und Q gleich weit entfernt und ist ihnen parallel; mithin geht sie durch die Mitte von AB.

Zweyter Theil.

Da die Richtung der beyden Kräfte P und Q, und die der aus ihnen entspringenden zusammengesetzten R

parallel sind, so kann man sie so betrachten, als liefen sie in einem unendlich weit entfernten Punkte zusammen, und die beyden Kräfte P und Q als an diesem Punkte angebracht; da nun die aus zweyen an einem und demselben Punkte nach einerley Richtung wirkenden Kräften zusammengesetzte Kraft, der Summe dieser beyden Kräfte gleich ist (§. 10.), so ist die aus den beyden Kräften P und Q entspringende zusammengesetzte Kraft der Summe P + Q dieser beyden Kräfte gleich.

Erster Zusatz.

§. 16.

Um also den beyden Kräften P und Q das Gleichgewicht zu halten, muß man in der Mitte K der Geraden AB eine dritte, ihrer Summe gleiche Kraft anbringen, welche nach der entgegengesetzten Seite wirkt, und deren Richtung den Geraden AP, BQ parallel ist; denn diese dritte Kraft wird der aus ihnen zusammengesetzten gleich und gerade entgegengesetzt seyn.

Zweyter Zusatz.

§. 17.

Wenn man eine unbiegsame Gerade in irgend eine Anzahl gleicher Theile theilt, und in allen Theilpunkten gleiche Kräfte anbringt, deren Richtungen mit einander parallel sind, so wird die aus allen diesen Kräften entspringende zusammengesetzte, durch die Mitte der Geraden nach einer denen der Kräfte parallelen Richtung gehen, und ihrer ganzen Summe gleich seyn.

Denn alle besondre aus je zweyen und zweyen von der Mitte der Geraden in gleicher Entfernung liegenden Kräften, Zusammengesetzte, gehen durch die Mitte (§. 15.) nach dieser Richtung, und jede derselben ist der Summe der sie zusammensetzenden Kräfte gleich; es muß also (§. 10.) die aus allen zusammen entspringende Zusammengesetzte durch die Mitte nach eben der Richtung gehen, und der Summe aller besondern Zusammengesetzten, das heißt der Summe aller zusammensetzenden Kräfte gleich seyn.

Lehrsatz.

§. 18.

Wenn an den Endpunkten einer unbiegsamen geraden Linie AB Fig. 4. zwey ungleiche Kräfte P, Q angebracht sind, deren Richtungen AP, BQ einander parallel sind, und welche nach einerley Seite wirken, so ist

1) die Zusammengesetzte dieser beyden Kräfte ihrer Summe gleich, und ihre Richtung ist der der Kräfte parallel.

2) Der Punkt C, an welchem die Zusammengesetzte angebracht ist, theilt die Gerade AB in zwey Theile, welche sich umgekehrt wie die Kräfte verhalten, so daß man hat

$$P : Q = BC : AC.$$

Beweis.

Erster Theil.

Es sey die Gerade AB im Punkte D in zwey Theile

getheilt, welche mit den beyden Kräften P, Q in einem geraden Verhältnisse stehen, so daß man haben wird

$$P : Q = AD : DB.$$

Es sey ferner die unbiegsame Gerade von beyden Seiten dergestalt verlängert, daß AE der AD, und daß BF der BD gleich sey. Wir wollen nun annehmen, daß die beyden Kräfte P, Q auf alle Punkte der Geraden EF gleichförmig vertheilt sind, und nach Richtungen wirken, die denen der beyden Kräfte parallel sind; es ist klar, daß die Kraft P auf dem Theil DE der unbiegsamen Geraden, und daß die Kraft Q auf dem Theil DF derselben vertheilt seyn wird. Ferner wird die Kraft P die zusammengesetzte aller auf ED vertheilten, und die Kraft Q die aller auf DF vertheilten Kräfte seyn (§. 17.); die aus allen auf der ganzen Geraden EF vertheilten Kräften erfolgende zusammengesetzte Kraft wird also mit der der beyden Kräfte P, Q einerley seyn. Nun geht diese erstere Zusammengesetzte durch die Mitte C der Geraden EF, nach einer der der zusammensetzenden Kräfte parallelen Richtung, und ist ihrer Summe gleich (§. 17.); es ist daher die aus den Kräften P, Q erfolgende Zusammengesetzte ihrer Summe gleich, und ihre Richtung, welche überdieß durch den Punkt C geht, ist der eben dieser Kräfte parallel.

Zweyter Theil.

Da die Gerade AB die Hälfte von EF ist, so hat man AB = EC; und zieht man von diesen beyden Größen den gemeinschaftlichen Theil AC ab, so hat man BC = EA = AD. Ferner ist AB = CF, und zieht

man den gemeinschaftlichen Theil CB ab, so hat man AC = BF = DB; da man nun nach der Annahme P : Q = AD : DB, so wird man auch haben P : Q = BC : AC. Nun haben wir eben gezeigt, daß die Zusammengesetzte der beyden Kräfte P, Q durch den Punkt C geht, mithin theilt der Punkt C, an welchem diese Zusammengesetzte angebracht werden muß, die Gerade AB in zwey Theile, welche den Kräften umgekehrt proportional sind.

Erster Zusatz.

§. 19.

Um also den beyden Kräften P, Q das Gleichgewicht zu halten, muß man die Gerade AB im Punkte C in zwey Theile theilen, welche sich umgekehrt wie diese beyden Kräfte verhalten, und im Punkte C eine dritte, der Summe P + Q gleiche Kraft anbringen, welche nach der entgegengesetzten Seite wirkt, und deren Richtung der der beyden Kräfte P, Q parallel ist.

Anmerkung.

§. 20.

Wenn das Verhältniß der Kräfte P, Q und die Länge der Geraden AB in Zahlen gegeben wäre, und man wollte die Entfernungen des Punktes C von den Punkten A, B finden, so könnte die Proportion

$$P : Q = BC : AC$$

nicht unmittelbar hierzu gebraucht werden, weil in dieser Proportion nur die beyden ersten Glieder bekannt wären; man kann indessen leicht folgende daraus herleiten:

$$P + Q : Q = BC + AC : AC,$$

welche sich, weil BC + AC der AB gleich ist, in diese verwandelt

$$P + Q : Q = AB : AC,$$

in welcher die drey ersten Glieder bekannt sind.

Desgleichen könnte man die Entfernung BC durch diese andre Proportion finden

$$P + Q : P = AB : BC,$$

welche sich auf eben die Art aus der ersten herleiten läßt.

Zweyter Zusatz.

§. 21.

Wenn eine einzige Kraft R in einem Punkte C einer unbiegsamen Geraden angebracht ist, so kann man sie immer in zwey andre P, Q zerlegen, welche in zweyen auf eben dieser Geraden gegebenen Punkten angebracht, in einer zu RC parallelen Richtung wirkend, denselben Effekt hervorbringen; und man findet die Größe dieser Kräfte, wenn man die Kraft R vermittelst folgender Proportionen

$$AB : BC = R : P$$
$$AB : AC = R : Q$$

in deren jeder die drey ersten Glieder bekannt sind, in zwey Theile zerlegt, welche der Geraden AC, CB umgekehrt proportionirt sind. Denn die aus den beyden Kräften P, Q erfolgende Zusammengesetzte hat mit der Kraft R einerley Größe, einerley Richtung, und wirkt mit derselben nach einerley Seite.

Dritter Zusatz.

§. 22.

Da in Fig. 5. alles wie in der vorhergehenden ist, so werden, wenn man im Punkte C der Geraden AB eine der aus den beyden Kräften P, Q entspringenden Zusammengesetzten gleiche Kraft nach entgegengesetzter Richtung dergestalt anbringt, daß S = R = P + Q, die drey Kräfte P, Q, S im Gleichgewichte seyn (§. 19.), und jede der beyden Kräfte P, Q kann als eine der aus den beyden übrigen entspringenden Zusammengesetzten gleiche aber gerade entgegengesetzte angesehen werden. Die aus den beyden Kräften S, Q, deren Richtungen parallel sind, und welche nach entgegengesetzten Seiten wirken, entspringende Zusammengesetzte, ist demnach eine der Kraft P gleiche aber gerade entgegengesetzte Kraft p. Nun ist die Kraft P der Differenz der beyden Kräfte S, Q gleich, und wirkt nach einer entgegengesetzten Seite als die größere S dieser beyden Kräfte. Es ist also

1) die aus den beyden Kräften S, Q entspringende zusammengesetzte p ihrer Differenz S — Q gleich, und wirkt nach der Seite der größern in einer den Richtungen dieser beyden Kräfte parallelen Richtung.

Ferner hat man P + Q oder S : Q = AB : AC (§. 20.), mithin sind 2) die Entfernungen des Punktes A, an welchem diese Zusammengesetzte angebracht ist, von den Punkten C, B, den Kräften S, Q umgekehrt proportional.

Anmerkung.

§. 23.

Wenn die Verhältnisse der beyden Kräfte S, Q und die Länge der Geraden BC in Zahlen gegeben wären, und man wollte die Entfernung des Punktes A von den Punkten B, C finden, so könnte die vorhergehende Proportion nicht unmittelbar hierzu gebraucht werden, weil in dieser Proportion nur die beyden ersten Glieder bekannt sind; es ist aber leicht diese daraus herzuleiten

S — Q : Q = AB — AC oder BC : AC,

in welcher man die drey ersten Glieder kennt.

Die Entfernung AB könnte man durch diese andre Proportion finden

S — Q : S = AB — AC oder BC : AB,

welche sich ebenfalls aus der ersten herleiten läßt.

Vierter Zusatz.

§. 24.

Wenn die beyden Kräfte S, Q, deren Richtungen parallel sind, und welche nach entgegengesetzten Seiten wirken, einander gleich sind, so wird

1) die aus ihnen Zusammengesetzte, welche S — Q gleich ist (§. 22.), Null werden;

2) da in der Proportion S — Q : Q = BC : AC das zweyte Glied gegen das erste, welches Null ist, unendlich groß ist, so muß auch das vierte Glied AC gegen das dritte unendlich groß werden. Der Punkt A, an welchem diese Zusammengesetzte P angebracht werden muß, wird also vom Punkte C in einer unendlichen Ent-

fernung liegen. Um also zwischen den beyden Kräften S, Q das Gleichgewicht herzustellen, müßte man an der unbiegsamen Geraden eine Kraft Null anbringen, deren Richtung in einer unendlichen Entfernung mit den vorigen parallel wäre; dieses ist zwar nicht ungereimt, aber es läßt sich nicht vollziehen.

Man sieht hieraus, daß es unmöglich ist, zwischen zweyen gleichen Kräften, deren Richtungen parallel sind, und welche nach entgegengesetzten Seiten wirken, das Gleichgewicht herzustellen; aber vermittelst zweyer Kräfte kann dieses auf unendlich mannigfaltige Arten geschehen.

Aufgabe.

§. 25.

Wenn irgend eine Anzahl von Kräften P, Q, R, S 2c., Fig. 6. deren Richtungen parallel sind, und welche alle nach einerley Seite wirken, in den der Lage nach gegebenen und auf einer unveränderlichen Art mit einander verbundenen Punkten A, B, C, D 2c. angebracht sind, die aus allen diesen Kräften entspringende Zusammengesetzte zu bestimmen.

Auflösung.

Betrachtet man zuvörderst irgend zwey dieser Kräfte, wie P und Q, so kann man die aus ihnen entspringende zusammengesetzte T bestimmen (§. 18.); diese Zusammengesetzte wird gleich seyn P + Q, ihre Richtung wird den Richtungen der Kräfte P, Q parallel seyn, und man

findet den Punkt, an welchem sie angebracht werden muß, durch folgende Proportion

$$P + Q : Q = AB : AE.$$

Man substituire statt der beyden Kräfte P, Q ihre zusammengesetzte T, ziehe dann die Gerade EC, und es wird dann leicht seyn, die aus den beyden Kräften T, R entspringende zusammengesetzte V zu bestimmen; diese zusammengesetzte V wird auch die der drey Kräfte P, Q, R seyn; ihre Größe ist T + R oder P + Q + R, und man findet auf EC den Punkt F, in welchem sie angebracht werden muß, durch die Proportion

$$T + R \text{ oder } P + Q + R : R = EC : EF.$$

Statt der drey Kräfte P + Q + R substituire man ihre zusammengesetzte V, und nachdem man FD gezogen, kann man die aus den beiden Kräften V, S zusammengesetzte X bestimmen; diese zusammengesetzte X wird auch die der vier Kräfte P, Q, R, S seyn; ihre Größe ist V + S oder P + Q + R + S, und man findet auf FD den Punkt G, in welchem sie angebracht werden muß, durch die Proportion

$$V + S \text{ oder } P + Q + R + S : S = FD : FG.$$

Fährt man auf diese Art fort, so kann man die Lage der aus allen Kräften insgesammt entspringenden zusammengesetzten bestimmen, so groß auch ihre Anzahl seyn mag; und die Größe dieser zusammengesetzten wird der Summe aller dieser Kräfte gleich seyn.

Erster Zusatz.

§. 26.

Nimmt man nun an, daß der Punkt G mit den

übrigen Punkten A, B, C, D ꝛc. auf eine unveränderliche Art verbunden ist, so kann man allen den Kräften P, Q, R, S ꝛc. das Gleichgewicht halten, wenn man im Punkt G eine Kraft anbringt, deren Richtung den der ersten parallel ist, welche ferner auf eine entgegengesetzte Seite wirkt, und welche ihrer Summe P + Q + R + S ꝛc gleich ist.

Zweyter Zusatz.

§. 27.

Wenn von den Kräften P, Q, R, S ꝛc., deren Richtungen parallel sind, einige nach der einen, die andern aber nach einer entgegengesetzten Seite wirken, so kann man zuvörderst (§. 25.) die besondre zusammengesetzte aller derjenigen bestimmen, welche nach einer Seite wirken, und dann die besondre zusammengesetzte aller derjenigen, welche nach einer entgegengesetzten Seite wirken. Hierdurch sind alle Kräfte auf zwey andre nach entgegengesetzten Seiten wirkende zurück gebracht; und bestimmt man nach dem Verfahren des §. 23. die aus diesen beyden letztern Kräften entspringende zusammengesetzte, so erhält man die aus allen zusammengesetzte, und folglich die Kraft, welche nach der entgegengesetzten Seite angebracht allen vorgelegten Kräften das Gleichgewicht hält.

Da die aus den beiden besondern zusammengesetzten entspringende allgemeine zusammengesetzte der Differenz der beiden erstern gleich ist (§. 22.), und da ferner jede dieser beiden der Summe aller sie zusammensetzenden gleich ist (§. 25.), so folgt, daß die allgemeine

zusammengesetzte Kraft dem Ueberschuß der Summe aller Kräfte, welche nach der einen Seite wirken, über die Summe der nach der entgegengesetzten Seite wirkenden gleich ist.

Dritter Zusatz.

§. 28.

Wenn die Kräfte P, Q, R, S ꝛc. mit Beibehaltung ihrer Parallelität und ohne Veränderung ihrer Größe eine andre Richtung hätten und in p, q, r, s ꝛc. übergingen, so würde die aus den beiden ersten zusammengesetzte t noch immer durch den Punkt E gehen und der Summe p + q gleich seyn. Eben so würde die aus den dreyen Kräften p, q, r zusammengesetzte v noch durch den Punkt F gehen und der Summe p + q + r gleich seyn. Desgleichen würde die aus den vier Kräften p, q, r, s zusammengesetzte x noch durch den Punkt G gehen und der Summe p + q + r + s gleich seyn, und so fort. Es würde demnach die aus allen Kräften p, q, r, s entspringende allgemeine zusammengesetzte noch immer durch denselben Punkt gehen als die aus den ersten Kräften P, Q, R, S ꝛc. entspringende allgemeine zusammengesetzte.

Man sieht also, daß wenn die Größen und die Punkte, an welchen die parallelen Kräfte angebracht sind, einerley bleiben, die aus diesen Kräften entspringende zusammengesetzte immer durch einen bestimmten festen Punkt geht, was sie auch für eine Richtung haben; und die Größe dieser zusammengesetzten ist immer ihrer Summe gleich.

Der Punkt, durch welchen die aus mehreren parallelen Kräften entspringende zusammengesetzte geht, was sie auch für eine Richtung haben mögen, wird der **Mittelpunkt, Schwerpunkt der parallelen Kräfte** genannt.

Es ist einleuchtend, daß wenn die Punkte A, B, C, D ꝛc., an denen die parallelen Kräfte P, Q, R, S ꝛc. angebracht sind, in einerley Ebne liegen, auch der Mittelpunkt dieser Kräfte in eben derselben Ebne liegen wird; denn diese Ebne enthält die Gerade AB, und folglich den Punkt E dieser Geraden, welcher der Mittelpunkt der Kräfte P, Q ist; sie enthält aber auch die Gerade EC, mithin den Mittelpunkt F der Kräfte P, Q, R; endlich enthält sie auch FD und folglich den Mittelpunkt G der Kräfte P, Q, R, S, und so fort.

Es läßt sich auf eben die Art darthun, daß wenn alle Punkte, an welchen die Kräfte wirken, in einerley geraden Linie liegen, auch der Mittelpunkt der parallelen Kräfte auf derselben Geraden liegen würde.

Lehrsatz.

§. 29.

Zwey an einem und demselben Körper angebrachte Kräfte können keine zusammengesetzte haben, wenn ihre Richtungen weder parallel sind, noch in einem und demselben Punkte zusammen laufen, und folglich nicht in einerley Ebne liegen.

Beweis.

Wenn die Richtungen der beyden Kräfte nicht in einem und demselben Punkte zusammen laufen, so kön-

nen diese Kräfte auch nicht so angesehen werden, als wären sie bestimmt einen einzigen Punkt zu bewegen; es kann daher eine einzige Kraft nicht denselben Effekt hervorbringen; mithin haben diese Kräfte keine zusammengesetzte.

Lehrsatz.

§. 30.

Wenn die Richtungen der beyden in zweyen Punkten A, B eines und desselben Körpers angebrachten Kräfte P, Q Fig. 7 und 8. in einerley Ebne liegen, und folglich in irgend einem Punkte D zusammenlaufen, so muß

1) die aus diesen beyden Kräften entspringende zusammengesetzte durch den Durchschnittspunkt D gehen.

2) muß diese Richtung in der durch die Richtungen der beyden Kräfte P, Q bestimmten Ebne liegen.

Beweis.

Erster Theil.

Da der Punkt D sich auf den Richtungen der beyden Kräfte befindet, so kann man, wenn man diesen Punkt mit dem Körper auf eine unveränderliche Art verbunden annimmt, sich die Kräfte P und Q anstatt in A und B vielmehr in D angebracht denken, und sie so betrachten, als wäre ihr Effekt nur diesen Punkt in Bewegung zu setzen zu streben; es kann daher die aus ihnen erfolgende zusammengesetzte ebenfalls so angesehen wer-

den, als habe sie nur diesen Effekt. Nun kann eine einzige Kraft nicht auf einen einzigen Punkt wirken, wenigstens so lange sie nicht unmittelbar daran angebracht ist. Es kann daher die aus den beyden Kräften P und Q entspringende zusammengesetzte als im Punkte D angebracht angesehen werden. Mithin wird 1) die Richtung dieser Kraft durch den Durchschnitt der beyden sie zusammen setzenden gehen.

Zweyter Theil.

Wenn man sich durch die Punkte A, B eine unbiegsame mit dem Körper auf eine unveränderliche Art verbundene Gerade gezogen denkt, so ist der Effekt der beyden Kräfte P, Q, und folglich der ihrer zusammengesetzten, offenbar die Gerade AB in Bewegung zu setzen zu streben. Nun kann eine einzige Kraft nicht eine einzige Gerade in Bewegung setzen, wenigstens so lange sie nicht an einem Punkte dieser Geraden unmittelbar angebracht ist. Es kann daher die zusammengesetzte der beyden Kräfte P, Q als in einem der Punkte der Geraden AB angebracht angesehen werden; mithin geht die Richtung dieser Geraden zu gleicher Zeit sowohl durch den Punkt D als durch einen Punkt der Geraden AB. Sie wird also 2) in der Ebne des Dreyecks ABD liegen, welche durch die Richtungen der beyden zusammensetzenden Kräfte P, Q bestimmt wird.

Zusatz.

§. 31.

Hieraus folgt, daß wenn drey an einem und demselben Körper angebrachte Kräfte P, Q, R im Gleich=

gewichte sind, die Richtungen dieser drey Kräfte in einem und demselben Punkte D zusammenlaufen und in einer und derselben Ebne liegen werden.

Denn da diese drey Kräfte im Gleichgewichte sind, so ist irgend eine derselben der aus den beyden übrigen entspringenden zusammengesetzten gleich und gerade entgegen gesetzt; es haben daher jede zwey derselben eine zusammengesetzte, und die Richtungen dieser beyden Kräfte liegen (§. 29.) in einerley Ebne, und laufen in einem und demselben Punkt zusammen; mithin wird (§. 30.) die Richtung der aus diesen beyden Kräften zusammengesetzten, und folglich die der dritten Kraft, welche ihnen das Gleichgewicht hält, durch den Durchschnittspunkt gehen, und in der durch ihre Richtungen bestimmten Ebne liegen.

Lehnsatz.

§. 32.

Wenn eine Kraft P am Umkreise eines um seinen Mittelpunkt A Fig. 9. beweglichen Zirkels nach einer Richtung BP angebracht ist, welche diesen Umkreis tangentirt; so strebt diese Kraft den Kreis um seinen Mittelpunkt auf eben die Art zu bewegen, als wenn sie in irgend einem andern Punkte C nach einer Richtung CQ angebracht wäre, welche denselben Umkreis tangentirt.

Lehrsatz.

§. 33.

Wenn die Richtungen zweyer Kräfte P, Q

Fig. 10. in einerley Ebne liegen und in einem und demselben Punkte A zusammenlaufen, so wird, wenn man auf diese Richtungen die Geraden AB, AC diesen Kräften proportional aufträgt, so daß man hat

$$P : Q = AB : AC,$$

und wenn man ferner das Parallelogramm ABCD vollendet, die aus beyden Kräften entspringende zusammengesetzte nach der Diagonale AD des Parallelogramms wirken.

Beweis.

Wir wollen vorläufig annehmen, daß der Punkt D ein unüberwindliches Hinderniß sey, und wir vollen von diesem Punkte auf die Richtungen beyder Kräfte, die senkrechten DE, DF fällen; so werden die Dreyecke BED, CFD einander ähnlich seyn, weil die Winkel in B und C, welche dem Winkel A gleich sind, auch einander gleich seyn müssen; und man wird haben

$$DC : DB = DF : DE.$$

Nun ist nach der Annahme

$$P : Q = AB : AC \text{ oder } = DC : DB,$$

folglich wird man auch haben

$$P : Q = DF : DE.$$

Aus dem Punkte D, als aus einem Mittelpunkte, sey mit dem Halbmesser DF der Kreisbogen FG beschrieben, welcher sich im Punkte G auf der Verlängerung von ED endigt. Betrachtet man dann diesen Bogen und die Gerade EG als unbiegsame mit dem Punkte A auf eine unveränderliche Art verbundene Linien, so kann

man annehmen, daß die Kraft P im Punkte E ihrer Richtung, und daß eine der Q gleiche Kraft M im Punkte G nach einer der AP parallelen, und folglich den Bogen FG tangentirenden Richtung angebracht sey. Dieses vorausgesetzt wird man, weil M = Q und DF = DG, folgende Proportion haben

P : M = DG : DE.

Es wird demnach (§. 18.) die aus beyden parallelen Kräften P, M entspringende zusammengesetzte durch den festen Punkt D gehen, und vom Widerstande dieses Punktes vernichtet werden; mithin werden diese beyden Kräfte um eben diesen Punkt im Gleichgewichte seyn.

Nun strebt die Kraft Q, deren Richtung den Bogen FG tangentirt, und welche man als im Punkte F ihrer Richtung angebracht betrachten kann, diesen Bogen auf dieselbe Art zu drehen, wie die Kraft M (§. 32.), und kann daher statt dieser letztern substituirt werden, um der Kraft P das Gleichgewicht zu halten; es werden daher auch die Kräfte P, Q um den festen Punkt D im Gleichgewichte seyn; ihre zusammengesetzte wird also vom Widerstande dieses Punktes aufgehoben; und folglich geht die Richtung dieser zusammengesetzten durch den Punkt D.

Wir haben aber gesehen, daß die zusammengesetzte der beyden Kräfte P, Q durch den Durchschnittspunkt A ihrer Richtungen gehen muß (§. 30.); mithin wird diese zusammengesetzte nach der Diagonale AD wirken.

Zusatz.

§. 34.

Wenn man aus irgend einem auf der Richtung AD der aus beyden Kräften P, Q entspringenden zusammengesetzten, genommenen Punkt D, die Geraden DB, DC den Richtungen dieser Kräfte parallel führt, so wird man ein Parallelogramm ABCD bilden, dessen Seiten AB, AC den Kräften P, Q proportional seyn werden; das heißt, man wird haben

P : Q = AB : AC oder DC : DB.

Denn wenn diese Seiten den Kräften nicht proportional wären, so würde die aus ihnen entspringende zusammengesetzte nach der Diagonallinie eines Parallelogramms, dessen Seiten diesen Kräften proportional sind (§. 33.), und nicht nach AD wirken, welches wider die Annahme ist.

Zweyter Zusatz.

§. 35.

Wenn man aus irgend einem auf der Richtung AD der zusammengesetzten der Kräfte P, Q genommenen Punkt D auf die Richtungen dieser beyden Kräfte die senkrechten DE, DF fällt, so verhalten sich diese senkrechten umgekehrt wie die Kräfte P, Q.

Denn wir haben (§. 34.) gesehen, daß man hat

P : Q = DC : DB.

Nun geben die ähnlichen Dreyecke DBE, DCF

DC : DB = DF : DE;

mithin hat man

P : Q = DF : DE.

Lehrsatz.

§. 36.

Wenn die Richtungen der beyden Kräfte P, Q Fig. 11. in einer und derselben Ebne liegen und in einem Punkte A zusammenstoßen, so wird, wenn man auf ihre Richtungen die Geraden AB, AC diesen Kräften proportional trägt, so daß man hat

$$P : Q = AB : AC,$$

und das Parallelogramm ABDC vollendet, die aus diesen beyden Kräften entspringende zusammengesetzte R, sowohl in Ansehung ihrer Größe als ihrer Richtung durch die Diagonale AD des Parallelogramms ausgedrückt seyn; das heißt, man wird haben

$$P : Q : R = AB : AC : AD.$$

Beweis.

Wir haben schon (§. 33.) gesehen, daß die zusammengesetzte der beyden Kräfte P, Q nach der Diagonale AD des Parallelogramms wirken wird; es kommt also nur noch darauf an zu zeigen, daß ihre Größe durch die der Diagonale ausgedrückt ist.

Es sey also im Punkte A eine der zusammengesetzten Kraft R gleiche und nach gerade entgegengesetzter Richtung wirkende Kraft S angebracht, so wird diese Kraft nach der Verlängerung der Diagonale AD wirken, und die drey Kräfte P, Q, S werden im Gleichgewichte seyn. Es wird daher auch die Kraft Q der zusammengesetzten aus den beyden andern Kräften P, S

gleich seyn und eine gerade entgegengesetzte Richtung haben; mithin wird diese letztere zusammengesetzte nach der Verlängerung der Geraden CA ihre Richtung haben. Es sey daher CA auf ihre Verlängerung von A in H getragen; es sey ferner die Gerade HB der AD, und folglich der Richtung der Kraft S parallel geführt, und durch den Punkt H sey HK der Richtung der Kraft P parallel geführt; die beyden Kräfte P, S werden sich wie die Seiten AK, AB des Parallelogramms ABHK verhalten (§. 34.), das heißt man wird haben

P : S = AB : AK oder HB.

Nun ist im Parallelogramm ADBH, HB = AD, und ferner sind die beyden Kräfte S und R einander gleich; man wird also haben

P : R = AB : AD.

Nun ist nach der Annahme

P : Q = AB : AC;

nimmt man nun diese beyden Proportionen zusammen, so wird man haben

P : Q : R = AB : AC : AD.

Erster Zusatz.

§. 37.

Wenn die beyden Kräfte P, Q im Punkte A angebracht sind, so kann man zwischen ihnen das Gleichgewicht halten, wenn man in demselben Punkt eine dritte nach DA gerichtete Kraft anbringt, welche der Diagonale AD proportionirt ist; denn diese Kraft wird der aus den Kräften P, Q entspringenden zusammengesetzten gleich und gerade entgegengesetzt wirken.

Wenn die Kräfte P, Q in andern Punkten ihrer Richtungen angebracht sind, so kann man ihnen ebenfalls das Gleichgewicht halten, wenn man in irgend einem Punkt der Geraden AD nach der Richtung DA eine der AD proportionirte Kraft anbringt, wenn nur der Punkt, in welchem diese letztere Kraft angebracht ist, mit den Punkten, in denen die Kräfte P, Q angebracht sind, auf eine unveränderliche Art verbunden ist.

Zweyter Zusatz.

§. 38.

Eine jede der Größe und Lage nach gegebene Kraft R läßt sich immer in zwey andre Kräfte P, Q zerlegen, welche nach den gegebenen Richtungen AP, AQ wirken; wenn nur diese Richtungen und die der Kraft R in einerley Ebne liegen und in einem und demselben Punkt A zusammen laufen.

Man stelle in dieser Absicht die Kraft R durch einen Theil AD ihrer Richtung vor; führt man dann durch den Punkt D die Geraden DC, DB den gegebenen Richtungen AP, AQ parallel, so wird man ein Parallelogramm ABDC bilden, dessen Seiten AB, AC die verlangten Kräfte P, Q darstellen würden; den nach (§. 36.) wird die zusammengesetzte dieser beyden Kräfte mit der Kraft R einerley Größe und einerley Richtung haben.

Man kann dann die Größen dieser beyden Kräfte P und Q durch folgende Proportionen finden

$$AD : AB = R : P$$

$$AD ; AC = R : Q.$$

Aufgabe.

§. 39.

Die aus irgend einer gegebenen Anzahl von Kräften P, Q, R, S rc. Fig. 12. entspringende zusammengesetzte zu bestimmen, wenn die Richtungen derselben, es sey sie liegen in einerley, oder sie liegen nicht in einerley Ebne, doch alle in einem und demselben Punkte A zusammenlaufen.

Auflösung.

Man trage auf die Richtungen aller dieser Kräfte vom Punkte A aus gerade Linien AB, AC, AD, AE rc., welche ihrer Größe proportional sind Betrachtet man dann irgend zwey dieser Kräfte, wie P, Q, so kann man das Parallelogramm ABFC vollenden, dessen Diagonale AF die besondre zusammengesetzte T dieser beyden Kräfte ihrer Größe und Richtung nach darstellen wird (§. 36.).

Statt der Kräfte P, Q nehme man ihre zusammengesetzte T und betrachtet man die beyden Kräfte T, R, so erhält man, wenn das Parallelogramm AFGD vollendet wird, in dessen Diagonale AG sowohl die Größe als die Richtuug der aus den beyden Kräften T, R zusammengesetzten V, welche zugleich die der drey Kräfte P, Q, R seyn wird.

Auf gleiche Weise kann man statt der Kräfte P, Q, R ihre zusammengesetzte V nehmen, und betrachtet man die beyden Kräfte V, S, so kann man das Parallelogramm AGHE vollenden, dessen Diagonale AH die Größe und Richtung der aus den Kräften V, S entsprin-

genden

genden zusammengesetzten X geben wird, welche zugleich die der vier Kräfte P, Q, R, S seyn wird.

Fährt man auf diese Art fort, so wird man die Richtung und die Größe der aus allen Kräften P, Q, R, S ꝛc. zusammengesetzten finden, so groß auch die Anzahl dieser Kräfte seyn mag.

Zusatz.

§. 40.

Wenn die Kräfte P, Q, R, S ꝛc. an dem Durchschnittspunkt A ihrer Richtungen unmittelbar angebracht sind, so muß man, um ihnen das Gleichgewicht zu halten, zuvörderst die Größe und Richtung ihrer zusammengesetzten finden (§. 39.); dann muß man im Punkte A eine Kraft anbringen, welche ihr gleich aber gerade entgegengesetzt ist. Wenn aber die Kräfte an andern Punkten ihrer Richtungen, die auf eine unveränderliche Art mit einander verbunden sind, angebracht worden, so kann man ihnen das Gleichgewicht halten, wenn man in irgend einem Punkte der Richtung ihrer zusammengesetzten eine Kraft anbringt, welche dieser zusammengesetzten gleich und gerade entgegengesetzt ist, wenn nur der Punkt, an welchem diese Kraft angebracht ist, mit den der Kräfte P, Q, R, S ꝛc. unveränderlich verbunden ist.

Aufgabe.

§. 41.

Die aus irgend einer Anzahl Kräften P, Q, R, S ꝛc. Fig. 13. entspringende zusammengesetzte zu

bestimmen, wenn deren in einerley Ebne liegende Richtungen nicht in einem und demselben Punkte zusammenlaufen; wenn ferner die Punkte A, B, C, D ꝛc., an denen sie angebracht sind, unveränderlich mit einander verbunden, und wenn deren Größen durch die Theile Aa, Bb, Cc, Dd ꝛc. ihrer Richtungen dargestellt sind.

Auflösung.

Nachdem man die Richtungen irgend zweyer dieser Kräfte wie P, Q verlängert hat, bis sie sich im Punkte E schneiden, trage man von E in F und von E in G die Geraden Aa, Bb, welche diese Kräfte ausdrücken. Vollendet man dann das Parallelogramm FEeG, so wird deren Diagonale Ee die zusammengesetzte T der Kräfte P, Q ihrer Lage und Größe nach angeben (§ 36.).

Statt der Kräfte P, Q nehme man ihre zusammengesetzte T, deren Richtung man so wie die der Kraft R so weit verlängert, bis sie einander im Punkte H schneiden; man trage dann die Gerade Ee von H in I, die Gerade Cc von H in K, und vollende das Parallelogramm HIhK, dessen Diagonale Hh die zusammengesetzte V der beyden Kräfte T, R in ihrer Größe und Richtung darstellen wird, welche auch die der drey Kräfte P, Q, R ist.

Auf gleiche Weise kann man statt der drey Kräfte P, Q, R ihre zusammengesetzte V nehmen, und deren Richtung so wie die der Kraft S bis zu ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte im Punkte L verlängern. Trägt man dann aus L in M und aus L in N die Gera-

den Hh, Dd, welche die Kräfte V und S ausdrücken, so wird, wenn das Parallelogramm LMlN vollendet wird, dessen Diagonale Ll die zusammengesetzte X dieser beyden Kräfte ausdrücken, welche auch die der vier Kräfte P, Q, R, S ist.

Fährt man auf diese Art fort, so findet man die Größe und die Richtung der aus allen vorgelegten Kräften entspringenden zusammengesetzten, so groß auch ihre Anzahl immer seyn mag.

Zusatz.

§. 42.

Wenn also mehrere Kräfte, deren Richtungen in einerley Ebne liegen, an Punkten angebracht sind, welche in unveränderlicher Verbindung mit einander stehen, so haben diese Kräfte eine zusammengesetzte; es ist mithin möglich, ihnen vermittelst einer einzigen Kraft das Gleichgewicht zu halten; ausgenommen in dem Falle, wo die Richtung einer dieser Kräfte der der zusammengesetzten aus allen übrigen parallel läuft, und überdieß diese Kraft und diese zusammengesetzte einander gleich wären und nach entgegengesetzten Richtungen wirkten; denn wir haben (§. 24.) gesehen, daß man, um ihnen das Gleichgewicht zu halten, eine Kraft Null anbringen müßte, deren Richtung in einer unendlichen Entfernung ginge, welches unausführbar ist.

Lehrsatz.

§. 43.

Wenn drey Kräfte P, Q, R Fig 14. in ihrer

Größe und Richtung durch die drey an einer und derselben Ecke des Parallelepipedums ABFEDG anstoßenden Kanten AB, AC, AD ausgedrückt sind, so daß man hat

P : Q : R = AB : AC : AD,

so wird die zusammengesetzte S in ihrer Größe und Richtung durch die aus dieser Ecke gezogene Diagonallinie AE ausgedrückt seyn; und man wird haben

P : Q : R : S = AB : AC : AD : AE.

Beweis.

In der Seitenfläche ABFC, welche die Richtungen der beyden Kräfte P, Q enthält, sey die Diagonale AF geführt, auch sey die Diagonale DE in der gegenüberstehenden Seitenfläche DHEG gezogen; diese beyden Diagonalen werden einander parallel und gleich seyn, weil die beyden Kanten AD, EF des Parallelepipedums, deren Endpunkte sie verbinden, gleich und parallel sind; mithin ist AFED ein Parallelogramm. Dieses vorausgesetzt, so wird, da die beyden Kräfte P, Q in ihrer Größe und Richtung durch die Seiten AB, AC der Seitenfläche ABFC ausgedrückt sind, welche ein Parallelogramm ist, die aus ihnen zusammengesetzte T in ihrer Größe und Richtung durch die Diagonale AF ausgedrückt seyn (§. 36.), und man wird haben

P : Q : T = AB : AC : AF.

Da ferner die beyden Kräfte T, R durch die Seiten AF, AD des Parallelogramms AFED ausgedrückt sind, so wird ihre zusammengesetzte S, welche auch die

der drey Kräfte P, Q, R seyn wird, durch die Diagonallinie AE desselben Parallelogramms ausgedrückt seyn, und man wird haben.

T : R : S = AF : AD : AE.

Nimmt man die beyden proportionalen Reihen zusammen, so wird man haben

P : Q : R : S = AB : AC : AD : AE.

Nun ist die Diagonallinie AE zugleich die des Parallelepipedums; mithin wird die aus den dreyen Kräften P, Q, R entspringende zusammengesetzte durch die Diagonallinie des Parallelepipedums ausgedrückt seyn.

Zusatz.

§. 44.

Eine jede der Größe und Richtung nach gegebene Kraft S kann immer in drey andre Kräfte P, Q, R zerlegt werden, welche nach den gegebenen Geraden AP, AQ, AR wirken, die nicht in einerley Ebne liegen; wenn nur diese drey Richtungen und die der Kraft S in einem und demselben Punkte A zusammen stoßen.

In dieser Absicht lege man durch je zwey und zwey der drey Richtungen die drey Ebnen BAC, CAD, DAB; man stelle dann die Kraft S durch einen Theil AE ihrer Richtung vor, und lege durch den Punkt E drey Ebnen EGDH, EHBF, EFCG, welche respektiv den drey erstern parallel sind; diese sechs Ebnen werden die Seitenflächen eines Parallelepipedums seyn, dessen Diagonale AE ist, und dessen Kanten AB, AC, AD, welche für die drey gegebenen Richtungen genommen sind,

die Größen der drey gesuchten Kräfte P, Q, R ausdrücken werden; denn die zusammengesetzte dieser drey Kräfte wird mit der Kraft S einerley Größe und einerley Richtung haben (§. 43.).

Andre Auflösung.

Man führe durch den Punkt E drey Gerade den Richtungen AP, AC, AR parallel, und die Theile EF, EH, EG dieser Geraden, welche zwischen dem Punkte E und den Ebnen BAC, CAD, DAB liegen, werden die Größen der gesuchten Kräfte P, Q, R ausdrücken; denn da diese Geraden drey Kanten des Parallelepipedums sind, so werden sie den andern Kanten AB, AC, AD, welche ihnen parallel sind, respektiv gleich seyn.

Zweytes Kapitel.

Von den Momenten.

§. 45.

Man nennt das **Moment** einer Kraft in Rücksicht auf einen Punkt oder auf eine gerade Linie oder auf eine Ebne das Produkt aus dieser Kraft multiplicirt in den Abstand ihrer Richtung von diesem Punkte, oder von dieser geraden Linie, oder von dieser Ebne.

§. 46.

Wenn man die Momente verschiedener Kräfte in Rücksicht auf einen und denselben Punkt betrachtet, so

wird dieser Punkt der Mittelpunkt der Momente genannt; und wenn man alle Momente auf eine Gerade zurückführt, so wird diese die Axe der Momente genannt.

§. 47.

Hieraus folgt, daß wenn man die Größe einer Kraft, und überdieß ihr Moment in Rücksicht auf einen Mittelpunkt oder auf eine Axe oder auf eine Ebne kennt, der Abstand des Mittelpunktes oder der Axe oder der Ebne von der Richtung der Kraft gefunden wird, wenn man den Quotienten des Moments dividirt durch die Kraft nimmt.

Eben so findet man, wenn das Moment und dessen Entfernung bekannt ist, die Größe der Kraft, wenn man den Quotienten vom Moment dividirt durch die Entfernung nimmt.

Zusatz.

§. 48.

Wenn zwey Kräfte P, Q Fig. 15., deren Richtungen parallel sind, nach einerley Seite wirken, so sind ihre Momente in Rücksicht auf einen Punkt C ihrer zusammengesetzten einander gleich.

Denn wenn man durch den Punkt C eine Gerade AB auf die Richtungen beyder Kräfte senkrecht führt, welche sich in den Punkten A und B dieser beyden Richtungen endigt, so wird diese Gerade durch den Punkt C in zwey Theile getheilt seyn, welche sich umgekehrt wie die Kräfte P, Q verhalten (§. 18.); das heißt man wird haben

$$P : Q = BC : AC.$$

Vergleicht man also das Produkt der äußern und mittlern Glieder, so wird man haben

$$P \times AC = Q \times BC.$$

Lehrsatz.

§. 49.

Wenn an den Endpunkten A, B Fig. 15. einer unbiegsamen Geraden zwey Kräfte P, Q angebracht sind, deren Richtungen parallel sind, und welche nach einerley Seite wirken, und man führt durch den Punkt C, an welchem ihre zusammengesetzte angebracht werden muß, in irgend einer beliebigen Ebne eine Gerade DE; so sind die Momente der Kräfte P, Q in Rücksicht auf die Gerade DE einander gleich; das heißt, wenn man von den Punkten A, B auf DE die senkrechten AD und BE fällt, so wird man haben

$$P \times AD = Q \times BE.$$

Beweis.

Die rechtwinklichten Dreyecke ADC, BEC, welche wegen der bey C gleichen Scheitelwinkel ähnlich sind, geben

$$BC : AC = BE : AD;$$

nun hat man (§. 18.)

$$P : Q = BC : AC;$$

man wird also haben

$$P : Q = BE : AD.$$

Und vergleicht man das Produkt der äußern und mittlern Glieder, so findet sich

$$P \times AD = Q \times BE.$$

Lehrsatz.

§. 50.

Wenn zwey Kräfte P, Q, deren Richtungen parallel sind, und welche nach einerley Seiten wirken, in den Punkten A, B, Fig. 16 und 17. einer unbiegsamen Geraden angebracht sind, und man führt durch einen Punkt F dieser Geraden in irgend einer beliebigen Ebne die Axe der Momente FH, so ist

1) wenn der Punkt F auf der Verlängerung von AB Fig. 16. genommen ist, die Summe der Momente der beyden Kräfte P, Q, dem Momente ihrer zusammengesetzten R gleich; das heißt, wenn man von den Punkten A, B, und dem Punkte C, an welchem die zusammengesetzte angebracht werden muß, auf FH die senkrechten AG, BH, CI fällt, so wird man haben

$$R \times CI = Q \times BH + P \times AG.$$

2) Wenn der Punkt F zwischen den Punkten A und B genommen ist, so wird die Differenz der Momente der Kräfte P, Q dem Momente der zusammengesetzten gleich seyn; das heißt, man wird haben.

$$R \times CI = Q \times BH - P \times AG.$$

Beweis.

Durch den Punkt C sey DE der FH parallel ge-

führt, welche die senkrechten AG, BH, die nöthigenfalls verlängert werden müssen, in D und E schneiden wird; man wird alsdann haben $DG = CI = EH$. Ferner werden die Momente der beyden Kräfte P, Q in Rücksicht auf DE einander gleich seyn, und man wird haben (§. 49.)

$$P \times AD = Q \times BE.$$

Dieses vorausgesetzt, so wird im ersten Falle, da die zusammengesetzte R der Summe der beyden Kräfte P, Q gleich ist (§. 18.) das Moment derselben seyn

$$R \times CI = (Q + P) \times CI$$

oder $$= Q \times HE + P \times GD.$$

Nun ist $GD = AD + AG$; mithin wird man haben

$$R \times CI = Q \times HE + P \times AD + P \times AG;$$

oder setzt man statt $P \times AD$ das ihm gleiche Moment $Q \times BE$, so wird man haben

$$R \times CI = Q \times HE + Q \times BE + P \times AG,$$

oder endlich

$$R \times CI = Q \times BH + P \times AG.$$

Im zweyten Falle hat man ebenfalls, Fig. 17.

$$R \times CI = Q \times HE + P \times GD.$$

Nun ist $GD = AD - AG$;

man wird also haben

$$R \times CI = Q \times HE + P \times AD - P \times AG,$$

oder setzt man statt $P \times AD$ dessen Werth $Q \times BE$, so wird man haben

$$R \times CI = Q \times HE + Q \times BE - P \times AG,$$

oder endlich

$$R \times CI = Q \times BH - P \times AG.$$

Erster Zusatz.

§. 51.

Hieraus folgt

1) daß wenn die beyden Punkte A, B von einerley Seite der Axe FH liegen, Fig. 16., der Abstand CI des Punktes C der zusammengesetzten von dieser Axe gefunden wird, wenn man die Summe der Momente der Kräfte P, Q durch die zusammengesetzte, oder welches auf eins hinausläuft, durch die Summe P + Q der Kräfte dividirt (§. 18.); das heißt man wird haben

$$CI = \frac{Q \times BH + P \times AG}{P + Q},$$

2) daß wenn die Punkte A, B von beyden Seiten der Axe FH liegen, dieser Abstand gefunden wird, wenn man Differenz der Momente der Kräfte P, Q durch die Summe P + Q der Kräfte dividirt; das heißt man wird haben

$$CI = \frac{Q \times BH - P \times AG}{P + Q}.$$

In diesem Falle wird der Punkt C mit derjenigen von beyden Kräften P, Q, deren Moment am größten ist, auf einerley Seite der Axe der Momente GH zu liegen kommen.

Zweyter Zusatz.

§. 52.

Wenn die Axe FH auf AB senkrecht ist, so werden alle drey Gerade AG, BH, CI nach AB gerichtet seyn, und der vorhergehende Lehrsatz würde nicht minder statt finden; denn in diesem Falle hat man

$$AG = AF, \quad BH = BF, \quad CI = CF;$$

man wird mithin finden

für die Fig. 16. $R \times CF = Q \times BF + P \times AF$,

und für die Fig. 17. $R \times CF = Q \times BF - P \times AF$.

Wenn also zwey Kräfte P, Q, deren Richtungen parallel sind, und welche nach einerley Seite wirken in zweyen Punkte A, B einer unbiegsamen Geraden angebracht sind, so ist das Moment ihrer zusammengesetzten in Rücksicht auf irgend einen Punkt F dieser Geraden entweder der Differenz oder der Summe der Momente der Kräfte P, Q gleich, je nachdem der Punkt F auf AB oder auf deren Verlängerung genommen ist.

Was die Entfernung CF des Punktes F vom Punkte C der zusammengesetzten betrift, so findet man sie, wenn man die Differenz oder die Summe der Momente der Kräfte P, Q in Rücksicht auf diesen Punkt durch diese zusammengesetzte P + Q dividirt, je nachdem der Punkt F auf AB oder auf deren Verlängerung genommen ist; das heißt, man wird haben

bey der Fig. 16. $CF = \frac{Q \times BF + P \times AF}{P + Q}$

und bey Fig. 17. $CF = \frac{Q \times BF - P \times AF}{P + Q}$.

Lehrsatz.

§. 53.

Wenn zwey Kräfte P, Q Fig. 18 und 19., deren Richtungen parallel sind, und welche nach einerley Seite wirken, an den Punkten A, B einer unbiegsamen Geraden angebracht sind, und man

legt durch einen Punkt F dieser Geraden eine Ebne MN ihren Richtungen parallel, so ist

1) wenn der Punkt F auf der Verlängerung von AB genommen ist Fig. 18., die Summe der Momente beyder Kräfte P, Q in Rücksicht auf die Ebne MN dem Momente ihrer zusammengesetzten R gleich; das heißt, wenn man von den Punkten A, B und dem Punkte C, an welchem die zusammengesetzte angebracht werden muß, auf die Ebne die senkrechten AG, BH, CI fällt, so wird man haben

$$R \times CI = Q \times BH + P \times AG.$$

2) Wenn der Punkt F zwischen A und B liegt, so wird die Differenz der Momente der Kräfte P, Q dem Momente ihrer zusammengesetzten gleich seyn; das heißt man wird haben

$$R \times CI = Q \times BH - P \times AG.$$

Beweis.

Die drey Geraden AG, BH, CI, welche auf einer und derselben Ebne senkrecht sind, sind einander parallel, und da sie auch durch drey Punkte A, B, C einer und derselben Geraden gehen, so liegen sie in einer und derselben durch AB geführten Ebne; ihre Endpunkte G, H, I und der Punkt F werden also in dieser Ebne liegen. Aber die vier Punkte F, G, H, I sind auch in der Ebne MN; sie werden also im Durchschnitte zweyer verschiedenen Ebnen, und folglich in einer geraden Linie liegen. Es sey also die Gerade FGHI gezogen, so wird sie die Geraden AG, BH, CI unter einem rechten Winkel schneiden; denn sie liegt in der Ebne MN, auf welcher

diese Geraden senkrecht sind, und geht durch deren Endpunkte; betrachtet man also FGIH als Axe der Momente (§. 50.), so wird man haben

1) wenn der Punkt F auf der Verlängerung von AB Fig. 18. liegt

$$R \times CI = Q \times BH + P \times AG;$$

2) wenn der Punkt F zwischen A und B liegt, so wird man haben

$$R \times CI = Q \times BH - P \times AG.$$

Zusatz.

§. 54.

Wenn also 1) die beyden Kräfte P, Q von einerley Seite in Rücksicht der Ebne MN liegen, so ist der Abstand CI der Ebne von der Richtung der zusammengesetzten gleich der Summe der Momente der Kräfte in Rücksicht auf die Ebne dividirt durch die zusammengesetzte R, oder welches auf eins hinaus kommt (§. 18.), dividirt durch die Summe P + Q der Kräfte; das heißt man wird haben

$$CI = \frac{Q \times BH + P \times AG}{P + Q}.$$

2) Wenn die Ebne zwischen den Richtungen beyder Kräfte liegt, so ist diese Entfernung gleich der Differenz der Momente dividirt durch die Summe der Kräfte; das heißt man wird haben

$$CI = \frac{Q \times BH - P \times AG}{P + Q}.$$

Im letztern Falle wird die zusammengesetzte mit

derjenigen der Kräfte P, Q, deren Moment am größten ist, auf einerley Seite der Ebne MN liegen.

Lehrsatz.

§. 55.

Wenn an irgend einer beliebigen Anzahl von Punkten A, B, C, D ꝛc. Fig. 20. die in einerley Ebne liegen mögen oder nicht, aber übrigens unveränderlich mit einander verbunden sind, die Kräfte P, Q, R, S ꝛc. angebracht sind, deren Richtungen parallel sind, nach einerley Seite wirken, und die überdieß alle auf einerley Seite irgend einer ihren Richtungen parallelen Ebne MN liegen: so ist die Summe der Momente aller Kräfte in Rücksicht der Ebne MN dem Momente ihrer zusammengesetzten gleich.

Beweis.

Es sey die Gerade AB gezogen, und E sey derjenige Punkt dieser Geraden, durch welchen die zusammengesetzte T der beyden Kräfte P, Q geht; es sey dann die Gerade EC gezogen und F sey der Punkt derselben, durch welchen die zusammengesetzte V der beyden Kräfte T, R, oder der drey Kräfte P, Q, R geht; es sey dann FD geführt, und durch den Punkt G dieser Geraden gehe die zusammengesetzte X der beyden Kräfte V, S oder der vier Kräfte P, Q, R, S, und so fort. Endlich seyen von den Punkten A, B, C, D ꝛc und von den Punkten E, F, G ꝛc. auf die Ebne MN die senkrechten Aa, Bb, Cc, Dd ꝛc. Ee, Ff, Gg ꝛc. gefällt.

Dieses vorausgesetzt, so wird das Moment der zusammengesetzten T der Summe der Momente der sie zusammensetzenden Kräfte P, Q gleich seyn (§. 50.), und man wird haben

$$T \times Ee = P \times Aa + Q \times Bb.$$

Desgleichen wird das Moment der Kraft V der Summe der Momente der beyden sie zusammensetzenden T, R gleich seyn; und man wird haben

$$V \times Ff = T \times Ee + R \times Cc;$$

setzt man für $T \times Ee$ deren Werth, so findet man

$$V \times Ff = P \times Aa + Q \times Bb + R \times Cc.$$

Eben so würde das Moment der Kraft X der Summe der Momente der beyden sie zusammensetzenden V, S gleich seyn, welches geben wird

$$X \times Gg = V \times Ff + S \times Dd;$$

und setzt man statt $V \times Ff$ dessen Werth, so erhält man

$$X \times Gg = P \times Aa + Q \times Bb + R \times Cc + S \times Dd,$$

und so fort, so groß auch die Anzahl der Kräfte seyn mag. Mithin ist das Moment irgend einer zusammengesetzten Kraft der Summe der Momente aller sie zusammensetzenden gleich.

Erster Zusatz.

§. 56.

Wir haben (§. 25.) gesehen, daß die Größe der zusammengesetzten X der Kräfte P, Q, R, S ꝛc. der Summe $P + Q + R + S$ ꝛc. dieser Kräfte gleich ist; mithin ist der Abstand Gg der Richtung dieser zusammengesetzten von der Ebne MN der Summe der Momente aller

Kräfte

Kräfte P, Q, R, S ꝛc. dividirt durch die Summe aller Kräfte; das heißt man wird haben

$$Gg = \frac{P \times Aa + Q \times Bb + R \times Cc + S \times Dd \text{ ꝛc.}}{P + Q + R + S \text{ ꝛc.}}.$$

Zweyter Zusatz.

§. 57.

Wenn man also von der Seite, nach welcher die Kräfte angebracht sind, eine unbegränzte Ebne der MN parallel führt, welche von derselben um einen der Gg, d. h. der Größe

$$\frac{P \times Aa + Q \times Bb + R \times Cc + S \times Dd}{P + Q + R + S}$$

gleichen Abstand entfernt ist, so wird diese Ebne die Richtung der zusammengesetzten aller Kräfte P, Q, R, S enthalten; denn diese Ebne enthält alle Punkte, welche auf dieser Seite von der Ebne MN um die Größe Gg entfernt sind, und folglich alle Punkte der Richtung der zusammengesetzten.

Dritter Zusatz.

§. 58.

Wenn die Kräfte P, Q, R, S ꝛc. Fig. 21. von beyden Seiten der Ebne MN liegen, so ist das Moment ihrer zusammengesetzten in Rücksicht auf diese Ebne gleich dem Ueberschuß der Momente aller auf einerley Seite liegenden Kräfte, über die Summe der Momente der auf der andern Seite liegenden Kräfte.

Denn es sey V die besondre zusammengesetzte aller Kräfte P, Q ꝛc., welche auf einerley Seite der Ebne

liegen, und E der Punkt, an welchem diese Kraft angebracht werden muß. Desgleichen sey X die besondre zusammengesetzte aller Kräfte R, S ꝛc., welche von der andern Seite dieser Ebne liegen, und F der Punkt, an welchem diese Kraft angebracht werden muß. Wenn man nun auf die Ebne die senkrechten Aa, Bb .... Ee, Cc, Dd .... Ff fällt, so haben wir gezeigt (§. 55.), daß man haben wird

$$V \times Ee = P \times Aa + Q \times Bb \ldots.$$

und

$$X \times Ff = R \times Cc + S \times Dd \ldots.$$

Nun sey Y die zusammengesetzte der beyden Kräfte V, X, und G der Punkt, an dem sie angebracht werden muß: so wird diese Kraft die zusammengesetzte aller Kräfte P, Q, R, S ꝛc. seyn.

Dieses vorausgesetzt, so wird das Moment der zusammengesetzten der beyden Kräfte V, X, welche von beyden Seiten der Ebne MN liegen, der Differenz ihrer Momente gleich seyn (§. 50.); fällt man also auf die Ebne die senkrechte Gg, so wird man haben

$$Y \times Gg = V \times Ee - X \times Ff.$$

Setzt man nun statt dieser beyden letztern Momente ihre Werthe, so wird man haben

$$Y \times Gg = P \times Aa + Q \times Bb \ldots$$
$$- (R \times Cc + S \times Dd \ldots),$$

das heißt, das Moment der zusammengesetzten ist dem Ueberschuß der Summe der Momente aller von einerley Seite liegenden Kräfte über die der Momente aller auf der andern Seite liegenden gleich.

Vierter Zusatz.

§. 59.

Es wird daher im Allgemeinen, auf was für eine Art auch mehrere Kräfte P, Q, R, S ..., deren Richtungen parallel sind, und welche alle auf einerley Seite wirken, gegen die ihren Richtungen parallele Ebne liegen mögen, der Abstand Gg ihrer zusammengesetzten von dieser Ebne gleich seyn dem Ueberschuß der Summe der Momente aller auf einerley Seite dieser Ebne wirkenden Kräfte über die der Momente der auf der andern Seite dieser Ebne liegenden Kräfte, dividirt durch die Summe aller Kräfte; das heißt man wird haben

$$Gg = \frac{P \times Aa + Q \times Bb \ldots - (R \times Cc + S \times Dd \ldots)}{P + Q + R + S \ldots}.$$

Und diese zusammengesetzte wird auf derjenigen Seite der Ebne MN liegen, auf welcher die Summe der Momente am größten ist.

Fünfter Zusatz.

§. 60.

Wenn man also auf derjenigen Seite der Ebne MN, auf welcher die Summe der Momente am größten ist, in einer Entfernung, welche der Größe

$$Gg \text{ oder } \frac{P \times Aa + Q \times Bb \ldots - (R \times Cc + S \times Dd \ldots)}{P + Q + R + S \ldots}.$$

gleich ist, derselben eine unbegränzte Ebne parallel führt, so wird diese Ebne die Richtung der zusammengesetzten aller Kräfte P, Q, R, S ... enthalten.

Sechster Zusatz.

§. 61.

Wenn die Richtungen der Kräfte P, Q, R, S.... Fig. 22, 23. alle in einer und derselben auf der Ebne MN senkrechten Ebne liegen, so werden alle Gerade Aa, Bb, Cc, Dd... Gg auf die Gerade KL, den Durchschnitt beyder Ebnen fallen; und man wird nicht minder haben

Fig. 22. $Y \times Gg = P \times Aa + Q \times Bb \ldots + (R \times Cc + S \times Dd \ldots)$

Fig. 23. $X \times Gg = P \times Aa + Q \times Bb \ldots - (R \times Cc + S \times Dd \ldots)$,

je nachdem die Kräfte von einerley Seite oder von beyden Seiten der Geraden KL fallen; man wird also im ersten Falle haben

$$Gg = \frac{P \times Aa + Q \times Bb \ldots + (R \times Cc + S \times Dd \ldots)}{P + Q + R + S \ldots},$$

und im zweyten Falle

$$Gg = \frac{P \times Aa + Q \times Bb \ldots - (R \times Cc + S \times Dd \ldots)}{P + Q + R + S}.$$

Das heißt: Wenn verschiedene Kräfte, deren Richtungen parallel sind und in einerley Ebne liegen, nach einerley Seite wirken, so ist im Allgemeinen die Entfernung ihrer zusammengesetzten von irgend einer in derselben Ebne und ihren Richtungen parallel gezogenen Linie gleich dem Ueberschuß der Summe der Momente der von einerley Seite dieser Geraden liegenden Kräfte über die der Momente der auf der andern Seite liegenden, dividirt durch die Summe aller Kräfte.

Aufgabe.

§. 62.

Wenn irgend eine Anzahl Kräfte, deren Richtungen parallel sind, welche nach einerley Seite wirken, und bey denen die Punkte, an welchen sie angebracht sind, entweder in einerley Ebne oder auch nicht in einerley Ebne liegen, gegeben ist, die Richtung der zusammengesetzten aller dieser Kräfte vermittelst der Momente zu bestimmen.

Auflösung.

Nachdem man Fig. 4. zwey verschiedene Ebnen ABCD, BCIK nach belieben den Richtungen der Kräfte parallel geführt hat, suche man den Abstand dieser zusammengesetzten von jeder dieser Ebnen ins Besondre (§. 59.); man führe alsdann der Ebne ABCD in derselben Entfernung, um welche die zusammengesetzte davon absteht, und von der Seite, an welcher die Summe der Momente in Rücksicht auf die Ebne ABCD am größten ist, die Ebne EFGH parallel, so wird diese Ebne EFGH die verlangte Richtung enthalten (§. 60.). Ferner führe man der Ebne BCIK in einer Entfernung von derselben, welche der der zusammengesetzten von dieser Ebne gleich ist, und von der Seite, an welcher die Summe der Momente in Rücksicht der Ebne BCIK am größten ist, die Ebne LMNO parallel; so wird auch diese Ebne die verlangte Richtung enthalten. Da nun die Richtung der zusammengesetzten sowohl in der Ebne EFGH als in der Ebne LMNO liegt, so wird es die Gerade PQ des Durchschnitts dieser beyden Ebnen seyn.

Erster Zusatz.

§. 63.

Wir haben (§. 28.) gesehen, daß wenn verschiedene nach parallelen Richtungen wirkende Kräfte ihre Richtungen ändern, doch aber ihre Größe so wie die Punkte, an denen sie angebracht sind, und ihre Parallelität beybehalten, ihre zusammengesetzte immer durch einen gewissen Punkt gehen wird, welchen man den Mittelpunkt der parallelen Kräfte nennt; es wird mithin bey den parallelen Kräften, welche wir eben betrachtet haben, der Mittelpunkt auf der Richtung PQ ihrer zusammengesetzten liegen.

Um diesen Mittelpunkt zu finden, führe man beliebig eine dritte Ebne ABKR, und man denke sich, daß alle Kräfte, ohne ihre Größe noch die Punkte, an denen sie angebracht sind, zu verändern, einander und der Ebne ABKR parallel wirken, und suche dann den Abstand der zusammengesetzten dieser neuen Kräfte von dieser Ebne (§. 59.). Dieses vorausgesetzt, so wird, wenn man der Ebne ABKR in der eben gefundenen Entfernung eine Ebne STVX parallel führt, diese Ebne die neue zusammengesetzte, und folglich den Mittelpunkt der Kräfte enthalten. Da sich nun der Mittelpunkt der Kräfte sowohl auf der Geraden PQ, als in der Ebne STVX befinden muß, so wird er im Punkte Y des Durchschnitts der Geraden und der Ebne liegen; oder, welches auf eins hinaus kommt, dieser Mittelpunkt wird im Punkte Y des Durchschnitts der drey Ebnen EFGH, LMNO, STVX liegen.

Zweyter Zusatz.

§. 64.

Wenn die Kräfte P, Q, R, S.. Fig. 25., deren Richtungen parallel sind, und welche nach einerley Seite wirken, in einerley Ebne liegen, so muß man, um die Lage ihrer zusammengesetzten zu finden, zuvörderst in dieser Ebne eine Gerade LN den Richtungen der Kräfte parallel führen, und nachdem man aus allen Punkten A, B, C, D..., an denen die Kräfte angebracht sind, auf diese Gerade die senkrechten Aa, Bb, Bc, Dd . . . gefällt hat, trage man auf eine auf LN senkrechte Gerade LM die Gerade Lg′ der Größe

$$\frac{P \times Aa + Q \times Bb + R \times Cc + S \times Dd \ldots}{P + Q + R + S \ldots}$$

gleich (§. 61.); und die durch den Punkt g′ der LN parallel geführte Gerade g′Y wird die Richtung der zusammengesetzten seyn.

Wenn nicht alle Kräfte von einerley Seite der Geraden LN lägen, so müßte man die Momente der Kräfte, welche auf der andern Seite liegen, anstatt hinzu zu setzen, vielmehr abziehen (§. 61.).

Dritter Zusatz.

§. 65.

Um den Mittelpunkt der Kräfte P, Q, R, S . . . zu finden, deren Richtungen parallel sind und in einerley Ebne liegen, denke man sich, daß diese Kräfte, ohne ihre Größe, noch die Punkte A, B, C, D..., an denen sie angebracht sind, zu ändern, nach einer zu einer andern

Geraden wie LM parallelen Richtung wirken, auf welche man dann die senkrechten Aa′, Bb′, Cc′, Dd′ ...., fällt; so wird der Abstand Gg′ dieser Geraden von der neuen zusammengesetzten seyn

$$\frac{P \times Aa' + Q \times Bb' + R \times Cc' + S \times Dd' \ldots}{P + Q + R + S \ldots} \text{ (§. 61.).}$$

Wenn man also auf eine auf LM senkrechte die Gerade Lg dieser Entfernung gleich trägt, und durch den Punkt g die gG der LM parallel führt, so wird diese Gerade gG die Richtung der neuen zusammengesetzten seyn; da nun der Mittelpunkt der Kräfte sich sowohl auf der Richtung der ersten zusammengesetzten g′Y als auf der der zweyten gG befinden muß, so wird er im Punkte G des Durchschnitts dieser beyden Richtungen liegen.

Wenn alle Kräfte nicht von einerley Seite der Geraden LM lägen, so müßte man die Momente der auf der andern Seite gelegenen abziehen, anstatt hinzu zu setzen.

Vierter Zusatz.

§. 66.

Wenn die Punkte A, B, C, D ..., an denen die Kräfte angebracht sind, in einerley Ebne sind, auf welche die Richtungen der parallelen Kräfte P, Q, R, S ..., schief fallen, so wird der Mittelpunkt G dieser Kräfte auch in dieser Ebne liegen (§. 28.); und seine Lage wird dieselbe seyn, als wenn die Richtungen der Kräfte parallel wären und in derselben Ebne lägen.

Um in diesem Falle den Mittelpunkt der Kräfte G zu finden, ziehe man in dieser Ebne zwey beliebige Gera-

de LM, LN; man nehme alsdann an, daß die Kräfte der LN parallel gerichtet seyen, und man wird alsdann die Richtung g'Y ihrer zusammengesetzten bey dieser Annahme finden; man nehme sie ferner mit LM parallel an, und man wird auch die Richtung Gg ihrer zusammengesetzten finden; und der Punkt G des Durchschnitts der beyden Geraden g'Y, gG wird der Mittelpunkt der verlangten Kräfte seyn (§. 65.).

Nachdem der Mittelpunkt gefunden ist, so wird, wenn man durch diesen Punkt den wirklichen Richtungen der Kräfte P, Q, R, S ... eine Gerade parallel führt, diese Gerade die Richtung ihrer zusammengesetzten seyn.

Fünfter Zusatz.

§. 67.

Wenn endlich die Punkte a', b', c', d' ..., an denen die Kräfte angebracht sind, auf einerley auf die Richtungen der Kräfte schief fallender Linie liegen, so wird der Mittelpunkt g dieser Kräfte auf dieser Geraden seyn (§. 28.), und seine Lage würde dieselbe seyn, als wenn die Richtungen der Kräfte auf LM senkrecht wären.

Es wird also (§. 64.) der Abstand g'L dieses Mittelpunktes von einem auf der Geraden gegebenen Punkt L gleich seyn

$$\frac{P \times a'L + Q \times b'L + R \times c'L + S \times d'L}{P + Q + R + S \ldots},$$

wobey in Erwägung zu ziehen ist, daß man, wenn nicht alle Kräfte von einerley Seite des Punktes L liegen, die

Momente der auf der andern Seite liegenden abziehen muß, anstatt sie hinzu zu setzen.

Lehnsatz.

§. 68.

Wenn die Richtungen zweyer Kräfte P, Q Fig. 26. in einem Punkte A zusammen laufen, so sind die Momente dieser Kräfte in Rücksicht auf einem beliebigen Punkt D der Richtung ihrer zusammengesetzten R einander gleich.

Denn wir haben (§. 35.) gesehen, daß man, wenn vom Punkte D auf die Richtungen der Kräfte, die nöthigenfalls verlängert werden müssen, die senkrechten DB, DC gefällt werden, die Proportion haben wird

$$P : Q = DC : DB.$$

Setzt man nun das Produkt der äußern Glieder dem der mittlern gleich, so hat man

$$P \times DB = Q \times DC.$$

Zusatz.

§. 69.

Hieraus folgt, daß wenn die Richtungen der beyden Kräfte P, Q Fig 27. in einem Punkte A zusammenlaufen, das Moment irgend einer derselben Q in Rücksicht auf einen Punkt D der Richtung der andern, dem Momente ihrer zusammengesetzten R in Rücksicht auf denselben Punkt gleich seyn wird; das heißt, wenn man auf die Richtung der Kraft Q und auf die der zusammengesetzten R, die nöthigenfalls verlängert werden müssen, die senkrechten DB und DC fällt, so wird man haben

$$Q \times DC = R \times DB.$$

Denn wenn man im Punkte A eine dritte Kraft S anbringt, welche der zusammengesetzten gleich und gerade entgegengesetzt ist, so werden die drey Kräfte P, Q, S im Gleichgewichte seyn, und folglich wird die Kraft P der zusammengesetzten der beyden Kräfte Q, S gleich und gerade entgegen gesetzt seyn. Es werden also die Momente der beyden Kräfte Q, S in Rücksicht auf den Punkt D der Richtung ihrer zusammengesetzten einander gleich seyn (§. 68.); man wird mithin haben

$$Q \times DB = S \times DC,$$

oder weil $S = R$

$$Q \times DB = R \times DC.$$

Lehrsatz.

§. 70.

Wenn die Richtungen zweyer Kräfte P, Q Fig. 28, 29. in einem und demselben Punkte A zusammenlaufen, so ist das Moment der zusammengesetzten R dieser Kräfte in Rücksicht auf irgend einen in der Ebne dieser Richtungen genommenen Punkt D, gleich der Summe oder der Differenz der Momente der Kräfte P, Q in Rücksicht auf denselben Punkt, je nachdem der Punkt D außerhalb oder innerhalb des von den Richtungen der Kräfte gebildeten Winkels PAQ liegt; das heißt, wenn man vom Punkte D auf diese Richtungen und auf die ihrer zusammengesetzten die senkrechten DB, DC, DE fällt, so hat man

im ersten Falle $R \times DE = Q \times DC + P \times DB$
und im zweyten $R \times DE = Q \times DC - P \times DB$.

Beweis.

Es sey die Gerade AD gezogen, und die Kraft P in zwey andre p, p′ zerlegt, von denen die erste nach der Richtung AD, und die andre nach der Richtung der Kraft Q wirkt. In dieser Absicht stelle man (§. 38.) die Kraft P durch den Theil AF ihrer Richtung vor; durch den Punkt F führe man die Geraden FG, FH der AQ und AD respektiv parallel; so werden die beyden zusammensetzenden p, p′ durch die Seiten AG, AH des Parallelogramms AGFH ausgedrückt seyn.

Da sich der Punkt D auf der Richtung der zusammensetzenden p befindet, so wird das Moment der andern zusammensetzendenden p′ in Rücksicht auf diesen Punkt, dem Momente ihrer zusammengesetzten P gleich seyn, und man hat (§. 69.) $p' \times DC = P \times DB$. Nimmt man ferner statt der Kraft P die beyden Kräfte p, p′, so wird die zusammengesetzte R der beyden Kräfte P, Q auch die der drey Kräfte p, p′, Q seyn.

Dieses vorausgesetzt, so werden im ersten Falle die beyden Kräfte Q und p′, welche einerley Richtung haben, und welche nach einerley Seite wirken, mit einer einzigen ihrer Summe $Q + p'$ gleichen Kraft auf einerley Art wirken; es kann daher die Kraft R als die zusammengesetzte der beyden Kräfte p und $Q + p'$ angesehen werden; das Moment dieser zusammengesetzten in Rücksicht auf einen Punkt D der Richtung der erstern

dieser Kräfte, wird daher dem Momente der zweyten gleich seyn (§. 69.); man hat mithin

$$R \times DE = (Q + p') DC$$

oder

$$R \times DE = Q \times DC + p' \times DC.$$

Setzt man statt des Moments $p' \times DC$ dessen Werth, so hat man

$$R \times DE = Q \times DC + P \times DB.$$

Im zweyten Falle werden die beyden Kräfte Q, p', welche einerley Richtung haben, und welche nach entgegengesetzten Seiten wirken, mit einer einzigen, ihrer Differenz $Q - p'$ gleichen Kraft auf einerley Art wirken. Nun ist das Moment dieser einzigen Kraft in Rücksicht auf den Punkt D der Richtung der Kraft p, dem Momente der zusammengesetzten R dieser beyden Kräfte gleich (§. 69.); man wird also haben

$$R \times DE = (Q - p') DC$$

oder

$$R \times DE = Q \times DC - p' \times DC.$$

Setzt man nun statt des Moments $p' \times DC$ dessen Werth, so hat man

$$R \times DE = Q \times DC - P \times DB.$$

Anmerkung.

§. 71.

Nimmt man an, daß die Gerade AD unbiegsam, und daß der Punkt D unbeweglich sey, so werden, wenn dieser Punkt außerhalb des Winkels PAQ Fig. 28. liegt, die beyden Kräfte P, Q den Punkt A um den Punkt D nach einerley Seite zu bewegen streben; und im Ge-

gentheile, wenn der Punkt D innerhalb des Winkels PAQ liegt, Fig. 29., werden die beyden Kräfte den Punkt A nach entgegengesetzten Seiten zu bewegen streben.

Wenn also die Richtungen zweyer Kräfte in einerley Ebne liegen, so ist daß Moment ihrer zusammengesetzten in Rücksicht auf einen beliebigen in dieser Ebne genommenen Punkt, entweder der Summe oder der Differenz ihrer Momente in Rücksicht auf diesen Punkt gleich, je nachdem diese Kräfte den Punkt, an welchem sie angebracht sind, um den Mittelpunkt der Momente nach einerley oder nach entgegesetzten Seiten zu bewegen streben; aber in allen Fällen strebt die zusammengesetzte den Punkt, an welchem sie angebracht, nach eben der Seite zu bewegen, auf welcher diejenige von beyden Kräften liegt, deren Moment am größten ist.

Lehrsatz.

§. 72.

Wenn mehrere Kräfte P, Q, R, S Fig. 30., deren Richtungen in einerley Ebne liegen, in den mit einander unveränderlich verbundenen Punkten a, b, c, d . . . angebracht sind, und diese Punkte um einen andern in dieser Ebne genommenen Punkt D nach einerley Seite zu drehen streben; so ist die Summe der Momente dieser Kräfte in Rücksicht auf den Punkt D gleich dem Momente ihrer zusammengesetzten in Rücksicht auf eben diesen Punkt.

Beweis.

Es sey V die besondre Zusammengesetzte der beyden

Kräfte P, Q; X die der beyden Kräfte V, R, und folglich die der drey Kräfte P, Q, R; Y sey die der beyden Kräfte X, S und folglich die der vier Kräfte P, Q, R, S; und so fort. Endlich seyen aus dem Punkte D auf die Richtungen der Kräfte, und auf die der besondern zusammengesetzten V, X, Y . . . die senkrechten DE, DF, DG, DH, DI, DK, DL gefällt. Dieses vorausgesetzt, so wird das Moment der zusammengesetzten V der Summe der Momente der sie zusammensetzenden P, Q gleich seyn (§. 70.), welches giebt

$$V \times DI = P \times DE + Q \times DF.$$

Desgleichen wird das Moment der zusammengesetzten X der Summe der Momente der sie zusammensetzenden V, R gleich seyn, und man hat

$$X \times DK = V \times DI + R \times DG;$$

oder, wenn man statt des Moments $V \times DI$ dessen Werth setzt

$$X \times DK = P \times DE + Q \times DF + R \times DG.$$

Desgleichen hat man

$$Y \times DL = X \times DK + S \times DH,$$

oder, wenn man für das Moment $X \times DK$ dessen Werth setzt

$$Y \times DL = P \times DE + Q \times DF + R \times DG + S \times DH,$$

und so fort, so groß auch die Anzahl der Kräfte seyn mag. Es wird also das Moment einer jeden zusammengesetzten der Summe der Momente aller sie zusammensetzenden gleich seyn.

Erster Zusatz.

§. 73.

Wenn die Kräfte P, Q, R, S Fig. 31. die Punkte, an denen sie angebracht sind, um den Mittelpunkt der Momente D nicht nach einerley Seite zu bewegen streben, so wird das Moment ihrer zusammengesetzten gleich seyn dem Ueberschuß der Summe der Momente, welche ihn nach einerley Seite zu bewegen streben, über die Summe der Momente derjenigen, welche ihn nach der entgegengesetzten Seite zu bewegen streben.

Denn es sey V die besondre zusammengesetzte aller Kräfte P, Q ...., welche nach einerley Seite zu bewegen streben; desgleichen sey X die besondre zusammengesetzte aller Kräfte R, S ...., welche nach der entgegengesetzten Seite zu bewegen streben; und vom Punkte D seyen auf die Richtungen der Kräfte, und auf die der besondern zusammengesetzten V, X die senkrechten DE, DF .... DI, DG, DH .... DK gefällt; so wird man haben (§. 72.)

$$V \times DI = P \times DE + Q \times DF \ldots.$$

und $X \times DK = R \times DG + S \times DH \ldots.$

Endlich sey Y die zusammengesetzte der beyden Kräfte V, X, und folglich die aller Kräfte P, Q, R, S ...

Dieses vorausgesetzt, so wird das Moment der zusammengesetzten Y in Rücksicht auf den Punkt D gleich seyn der Differenz der Momente der sie zusammensetzenden V, X, welche nach entgegengesetzten Seiten Bewegungen hervor zu bringen streben (§. 71.), das heißt,

wenn

wenn man auf ihre Richtung die senkrechte DL fällt, so wird man haben

$$Y \times DL = V \times DI - X \times DK;$$

setzt man nun statt der beyden letztern Momente ihre Werthe, so hat man

$$Y \times DL = P \times DE + Q \times DF \ldots . - (R \times DG + S \times DH \ldots .)$$

Zweyter Zusatz.

§. 74.

Wenn die in einerley Ebne liegenden Richtungen der Kräfte P, Q, R, S ... Fig 32, 33, 34. einander parallel sind, so werden die aus dem Mittelpunkte der Momente D auf diese Richtungen und auf die der zusammengesetzten Y gefällten senkrechten DE, DF, DG, DH .... DL in einerley geraden Linie liegen; und der vorhergehende Satz würde nicht minder statt finden, es sey, daß alle Kräfte nach einerley Seite wirken, wie in der Figur 32, oder daß einige nach der einen Seite, andre aber nach der entgegengesetzten Seite wirken, wie in Fig. 33 und 34. Nun ist die zusammengesetzte Y aller dieser Kräfte gleich dem Ueberschuß der Summe aller nach einerley Seite wirkenden über die der nach der entgegengesetzten Seite wirkenden (§. 27.); es wird demnach der Abstand DL des Mittelpunktes der Momente von der Richtung der zusammengesetzten gleich seyn dem Quotienten aus dem Ueberschuß der Summe der Momente der Kräfte, welche nach einerley Seite wirken, über die Summe der Momente derer, welche nach der entgegengesetzten Seite zu bewegen streben, dividirt durch

den Ueberschuß der Summe der nach einerley Seite wirkenden Kräfte über die nach der entgegengesetzten Seite wirkenden; man wird also haben

$$DL = \frac{P \times DE + Q \times DF \ldots - (R \times DG + S \times DH \ldots)}{P + Q + R + S \ldots}$$

Fig. 32.

$$DL = \frac{P \times DE + Q \times DF \ldots - (R \times DG + S \times DH \ldots)}{P + Q \ldots - (R + S \ldots)}$$

Fig. 33.

$$DL = \frac{P \times DE + R \times DG \ldots - (Q \times DF + S \times DH \ldots)}{P + S \ldots - (Q + R \ldots)}$$

Fig. 34.

In allen Fällen wirkt die zusammengesetzte nach der Seite, auf welcher die Summe der Kräfte am größten ist; und sie liegt gegen den Punkt D auf derjenigen Seite, auf welcher die Summe der Momente am größten ist.

Drittes Kapitel.

Vom Mittelpunkte der Schwere.

§. 75.

Die Eigenschaft, nach welcher die sich selbst überlassenen Körper zur Erde zu fallen, wird die Schwere genannt.

Alle Elementartheilchen, aus denen die Körper zusammengesetzt sind, besitzen diese Eigenschaft, und zwar

haben sie dieselbe ununterbrochen; denn in so viele Theile auch ein Körper zerlegt seyn mag, so drückt jedes seiner Theilchen immer unterwärts, und fällt gegen die Erde zu, wenn es sich selbst überlassen wird.

§. 76.

Das Gewicht eines Körpers nennt man das Bestreben, welches dieser Körper ausübt, wenn er zurückgehalten, oder von einem sich seinem Falle entgegensetzenden Hindernisse unterstützt wird; dieses Gewicht kann als der Effekt einer Kraft angesehen werden, welche ununterbrochen an dem Körper angebracht ist; auch ist man gewohnt, die Schweere als eine Kraft anzusehen.

Die Schwere ist, strenge genommen, keine beständige Kraft für ein und dasselbe Elementartheilchen, und zwar verändert sie sich nach den verschiedenen Lagen, welche dieses Theilchen gegen die Erdkugel haben kann.

1) Wenn sich die Entfernung des Elementartheilchens vom Mittelpunkte der Erde ändert, so nimmt die Schwere in eben dem Verhältniß ab, als das Quadrat dieser Entfernung zunimmt; da ferner die Erde keine vollkommne Kugel ist, und die Halbmesser des Aequators größer als die nach den Polen gezogenen Halbmesser sind, so ist die Schwere an der Oberfläche der Erde für ein und dasselbe Elementartheilchen größer, wenn dieses Theilchen gegen die Pole zu, als wenn es gegen den Aequator zu liegt, weil alsdann die Entfernung dieses Theilchens vom Mittelpunkte der Erde kleiner ist.

2) Die Erde dreht sich um ihre Axe, und alle sie zusammensetzende Theile machen ihre Umdrehungen in einerley Zeit, nehmlich in beynahe 24 Stunden. Die näher zum Aequator liegenden Theile beschreiben weit größere Zirkelumkreise als die den Polen näher liegenden Theile; ihre Centrifugalkraft, welche ebenfalls weit größer ist, vernichtet einen größern Theil des Effekts der Schwere, und ist also eine neue Ursache, welche bewirkt, daß diese Kraft am Aequator kleiner als an den Polen ist.

Wenn man also strenge reden will, so ist die Schwere für ein und dasselbe Elementartheilchen veränderlich, wenn sich dieses Theilchen der Oberfläche der Erde nähert oder entfernt, und wenn dieses Theilchen dem Aequator näher oder davon entfernter kommt. Allein die Entfernungen der Lagen, in welchen man in der Statik ein und dasselbe Elementartheilchen zu betrachten gewohnt ist, sind gegen den Halbmesser der Erde so klein, daß die Wirkungen dieser Veränderung durchaus unmerklich sind; und man ist daher berechtigt die Schwere als eine für einerley Elementartheilchen beständige Kraft anzusehen, was für eine Lage dieses Theilchen auch haben mag.

§. 77.

Die gerade Linie, nach welcher ein Theilchen sich selbst überlassen gegen die Erde zu fällt, und welche offenbar die Richtung der Schwere ist, heißt eine vertikale; diese Gerade ist immer auf der Oberfläche der Erde, oder richtiger, auf der Oberfläche der still stehenden Wasser, senkrecht.

§. 78.

Eine Ebne ist horizontal, wenn sie auf einer vertikalen Geraden senkrecht ist.

Wenn die Erde eine vollkommne Kugel wäre, so würden alle Richtungen der Schwere in einem und demselben Punkte, welches dann der Mittelpunkt seyn würde, zusammen laufen; da sie aber keine vollkommne Kugel ist, so dürfen nicht immer die Richtungen der Schwere für zwey verschiedene Elementartheilchen in einerley Ebne liegen; liegen diese aber in einerley Ebne, so laufen sie auch in einem und demselben Punkte zusammen.

Indessen liegen diese Theilchen in einem und demselben Körper, und selbst die der verschiedenen Körper, welche man in der Statik zu betrachten gewohnt ist, gegen ihre Entfernung vom Mittelpunkte der Erde so nahe an einander, daß der von den Richtungen der Schwere zweyer Elementartheilchen gebildete Winkel unmerklich ist, und man ist daher berechtigt, alle diese Richtungen für parallel anzusehen.

§. 79.

Wir werden daher alle Theilchen der schweren Körper so betrachten, als würden sie von beständigen Kräften gegen die Erde zu gedrückt oder gezogen; wir werden ferner annehmen, daß diese Kräfte parallel und nach einerley Seite wirken; mithin wird sich darauf alles das anwenden lassen, was wir von der Zusammensetzung, Zerlegung und dem Gleichgewichte der parallelen Kräfte gesagt haben.

Wenn verschiedene Kräfte, deren Richtungen parallel sind, und welche nach einerley Seite wirken, an Punkten angebracht sind, welche unveränderlich mit einander verbunden sind, so haben wir gesehen, 1) daß diese Kräfte eine ihrer Summe gleiche Zusammengesetzte haben; 2) daß die Richtung dieser Zusammengesetzten den der zusammen setzenden parallel ist; 3) daß es einen Mittelpunkt der Kräfte giebt, durch welchen diese zusammengesetzte immer gehen würde, wenn selbst diese Kräfte mit Beybehaltung ihrer Größe und Parallelität ihre Richtung änderten.

Es müssen daher auch 1) die Gewichte aller kleinen Theilchen eines festen Körpers eine Zusammengesetzte haben, welche das Gewicht des ganzen Körpers enthält, und diese Zusammengesetzte ist der Summe der Gewichte aller Theilchen gleich; 2) ist die Richtung dieser Zusammengesetzten oder des Gewichts des Körpers immer der der Schwere parallel, und folglich vertikal; 3) müssen sich, was für verschiedene Lagen man auch diesem Körper geben mag, die Richtungen der Zusammengesetzten für alle diese Lagen in einem und demselben Punkte schneiden; denn wenn man auch die Lage des Körpers ändert, so verändert sich nicht die Größe der Kräfte, welche auf dessen Theilchen wirken, und diese Kräfte, welche bloß die Richtung gegen diesen Körper ändern, hören deshalb nicht auf parallel zu seyn.

§. 80.

Der Punkt, durch welchen die Richtung der Schwere eines Körpers immer geht, was für eine Lage man ihm

auch geben mag, wird der Mittelpunkt der Schwere oder der Schwerpunkt genannt.

§. 81.

Wenn mehrere Körper unveränderlich mit einander verbunden sind, und man betrachtet sie alle zusammen, als bildeten sie nur einen und denselben Körper, so giebt man gewöhnlich dieser Verbindung den Namen eines Systems.

§. 82.

Alles was bisher von einem einzigen Körper gesagt worden, muß auch von einem System mehrerer Körper gelten; das heißt, daß das Gewicht des ganzen Systems der Summe der Gewichte aller es zusammensetzenden Körper gleich seyn muß; daß die Richtung dieses Gewichts vertikal ist, und daß diese Richtung, bey jeder beliebigen Lage des Systems, immer durch einen und denselben Punkt gehen muß, welcher der Mittelpunkt der Schwere des Systems heißt.

Erster Zusatz.

§. 83.

Man kann immer das Gewicht eines Körpers oder eines Systems mehrerer Körper als eine vertikal wirkende, und im Mittelpunkt der Schwere des Körpers oder des Systems angebrachte Kraft betrachten; denn dieses Gewicht, welches die Zusammengesetzte der besondern Gewichte aller den Körper oder das System zusammensetzenden Elementartheilchen ist, kann als in

irgend einen Punkt seiner Richtung, und folglich im Mittelpunkt der Schwere angebracht betrachtet werden, welcher letztere immer auf dieser Richtung ist, was auch der Körper oder das System für eine Lage haben mag.

Zweyter Zusatz.

§. 84.

Man würde daher der Wirkung, welche die Schwere auf alle Theilchen eines Körpers oder eines Systems von Körpern ausübt, das Gleichgewicht halten, wenn man im Mittelpunkte der Schwere des Körpers oder des Systems von Körpern eine einzige Kraft anbrächte, deren Richtung vertikal, welche ferner dem ganzen Gewichte des Körpers oder des Systems gleich wäre, und welche nach einer Richtung wirkte, welche der der Schwere entgegengesetzt ist.

Und umgekehrt, wenn eine einzige Kraft den Gewichten aller Theilchen eines Körpers oder eines Systems von Körpern das Gleichgewicht hält, so muß die Richtung dieser Kraft vertikal seyn und durch den Mittelpunkt der Schwere des Körpers oder des Systems gehen.

Wenn also ein vermittelst eines Fadens ED an einem festen Punkte D aufgehängter Körper AB Fig. 35. im Gleichgewichte ist, und folglich die Richtung der Schwere vom bloßen Wiederstand des Fadens aufgehoben wird: so wird die Richtung dieses Fadens vertikal seyn, und ihre Verlängerung wird durch den Mittelpunkt der Schwere C des Körpers gehen.

Dritter Zusatz.

§. 85.

Hieraus leitet man eine sehr einfache Art her, den Mittelpunkt der Schwere eines Körpers von irgend einer Figur durch Versuche zu finden. Denn wenn man denselben Körper successiv an einem Faden in verschiedenen Punkten E, e aufhängt, und in Gedanken innerhalb des Körpers die beyden Richtungen des Fadens verlängert, so wird der Punkt C, worin diese beyden Richtungen einander schneiden, der verlangte Mittelpunkt der Schwere seyn.

Anmerkung.

§. 86.

Da die besondern Gewichte der ein System zusammen setzenden Körper als parallele in den besondern Mittelpunkten der Schwere dieser Körper angebrachte Kräfte angesehen werden können, so folgt, daß wenn die Gewichte dieser Körper und die Lagen ihrer besondern Mittelpunkte der Schwere bekannt sind, die Lage des Mittelpunktes ihres Systems durch die Verfahrungsarten gefunden werden kann, welche wir zum Aufsuchen des Mittelpunktes der parallelen Kräfte gegeben haben; es sey nun, daß man sich des Prinzips von der Zerlegung der parallelen Kräfte bedient, wie in §. 26., oder, daß man die Betrachtung der Momente anbringt, wie in (§. 63, 65, 66 und 67); wir werden bald Gelegenheit haben Beispiele davon zu geben.

Um den Mittelpunkt der Schwere eines Körpers

von irgend einer Figur zu finden, denke man sich diesen Körper in einer Anzahl solcher Theile zerlegt, daß man von jedem derselben das Gewicht und die Lage seines Mittelpunktes der Schwere finden kann; indem man dann den Mittelpunkt der Schwere des Systems aller dieser Theile findet, hat man den verlangten Mittelpunkt der Schwere des Körpers.

Wenn indessen die Theile des Körpers in seiner ganzen Ausdehnung gleichartig sind, und wenn die Figur nicht sehr verwickelt ist, so kann man öfters den Mittelpunkt der Schwere durch einfachere Betrachtungen finden, welche wir sogleich anwenden wollen, um zu Resultaten zu gelangen, die von vielfältigem Gebrauch sind.

Lehnsatz.

§. 87.

Wenn ein Körper als aus Theilen A, A′, B, B′, C, C′ . . . Fig. 36. zusammengesetzt betrachtet werden kann, welche zu zweyen und zweyen einander gleich sind, und eine solche Lage haben, daß die Mitten der Geraden AA′, BB′, CC′, welche die Mittelpunkte der Schwere der homologen Theile verbinden, in einem und demselben Punkt D zusammen fallen; so wird dieser Punkt, welcher der Mittelpunkt der Figur des Körpers ist, zugleich der Mittelpunkt der Schwere desselben seyn.

Denn der Punkt D ist der Mittelpunkt der Schwere eines jeden besondern Systems von zweyen homologen Theilen; er ist also auch der Mittelpunkt der Schwere ihres allgemeinen Systems.

Zusatz.

§. 88.

Betrachtet man die Linien, die Flächen und die Körper als aus gleichförmig schweren Theilen zusammen gesetzt, so ist klar 1) daß der Mittelpunkt der Schwere einer geraden Linie in der Mitte ihrer Länge liegt;

2) daß der Mittelpunkt der Schwere des Flächenraums und des Umfangs eines Parallelogramms BACD Fig. 37. im Mittelpunkte der Figur, das ist im Punkte E liegt, in welchem sich seine beyden Diagonalen AC, BD durchschneiden;

3) daß der Mittelpunkt der Schwere des Flächenraums eines Kreises und der seines ganzen Umfangs im Mittelpunkte des Kreises liegt;

4) daß der Mittelpunkt der Schwere der Oberfläche und der des körperlichen Inhalts eines Parallelepipedums in seinem Mittelpunkte der Figur sind, das ist, im Durchschnitte seiner vier Diagonalen, oder in der Mitte einer derselben;

5) daß der Mittelpunkt der Schwere der konvexen Oberfläche eines von zweyen parallelen Grundflächen begränzten Cylinders, der der ganzen Fläche dieses Cylinders, und der seines körperlichen Inhalts in der Mitte der Länge seiner Axe sind;

6) daß der Mittelpunkt der Schwere der Oberfläche einer Kugel, und der ihres körperlichen Inhalts im Mittelpunkte der Kugel sind.

Aufgabe.

§. 89.

Den Mittelpunkt der Schwere des Flächenraums irgend eines geradlinigten Dreyecks ABC Fig. 38. zu finden.

Auflösung.

Nachdem man durch das Scheitel A eines der Winkel desselben und durch die Mitte D der gegenüberstehenden Seite die Gerade AD gelegt hat, so muß, wenn man sich den Flächenraum des Dreyecks durch Linien, welche der BC parallel sind, in eine unendliche Anzahl Elemente zerlegt denkt, der Mittelpunkt der Schwere eines jeden dieser Elemente in dessen Mitte (§. 88.), und folglich auf der Geraden AD seyn; es wird also der Mittelpunkt der Schwere des Systems, welcher auch der des Flächenraums des Dreyecks seyn wird, auf eben dieser Geraden seyn (§. 28.). Aus eben dem Grunde wird, wenn man vom Scheitel B eines andern Winkels und durch die Mitte E der gegenüberstehenden Seite eine Gerade BE zieht, diese zweyte Gerade den Mittelpunkt der Schwere enthalten; er muß also im Punkte F des Durchschnitts dieser beyden Geraden liegen.

Erster Zusatz.

§. 90.

Wenn man vom Scheitel A Fig. 38. eines der Winkel des Dreyecks ABC, und durch die Mitte D der gegenüber stehenden Seite eine Gerade AD legt, und diese Gerade in drey gleiche Theile theilt:

so wird der Mittelpunkt der Schwere F des Flächeninhalts des Dreyecks auf dieser Geraden im zweyten Theilpunkt vom Scheitel gerechnet, oder im ersten Theilpunkt von der gegenüber stehenden Seite an liegen.

Denn wenn man die Gerade DE zieht, so wird diese Gerade der AB parallel seyn, weil die Seiten BC, AC in D und E proportional geschnitten sind; und die Dreyecke ABF, DEF werden ähnlich seyn, weil ihre correspondirende Winkel gleich sind; man wird also haben

$$AF : FD = AB : DE.$$

Aber die beyden andern ähnlichen Dreyecke ABC, EDC geben

$$AB : DE = BC : DC, \text{ oder } = 2 : 1 \text{ (§. 89.)}.$$

Man wird also haben

$$AF : FD = 2 : 1 \text{ oder } AF = 2FD,$$

und folglich

$$FD = \tfrac{1}{3}AD \text{ und } AF = \tfrac{2}{3}AD.$$

Zweyter Zusatz.

§. 91.

Wenn man in der Ebne irgend eines geradlinigten Dreyecks ABC Fig. 39. irgend eine Gerade GI zieht, so wird die vom Mittelpunkte der Schwere F des Flächenraums des Dreyecks auf GI gefällte senkrechte FO, dem dritten Theile der Summe AG + CH + BI der von den Scheiteln der drey Winkel auf eben diese Gerade gefällten senkrechten gleich seyn.

Es sey durch das Scheitel A eines der Winkel die Gerade AM der GI parallel geführt, welche die von den andern Punkten gefällten senkrechten in K, L, M schneiden wird; durch den Punkt A und den Mittelpunkt der Schwere F seyn die Gerade AF gelegt, deren Verlängerung die gegenüber stehende Seite im Punkte D halbiren wird; endlich sey vom Punkte D, die Gerade DN auf AM senkrecht geführt; dieses voraus gesetzt, wird man haben

$$DN = \frac{CK + BM}{2}$$

und die ähnlichen Dreyecke AFL, ADN werden geben

FL : DN = AF : AD oder = 2 : 3 (§. 90.);

man wird also haben

$$FL = \tfrac{2}{3} DN = \frac{CK + BM}{3}.$$

Da aber die Geraden AG, KH, LO, MI einander gleich sind, so wird man haben

$$LO = \frac{AG + KH + MI}{3};$$

wenn man nun diese Gleichung zur vorhergehenden hinzu setzt, erhält man

$$FL + LO = \frac{AG + CK + KH + BM + MI}{3};$$

das heißt

$$FO = \frac{AG + CH + BI}{3}.$$

Hieraus leitet man eine andre Art her, den Mittelpunkt der Schwere des Flächenraums eines geradlinigten Dreyecks ABC Fig. 40. zu finden; denn nachdem

man in der Ebne des Dreyecks zwey Gerade GI, GP gezogen, und nachdem man die Entfernungen FO, FR des Mittelpunktes der Schwere von jeder dieser Geraden gefunden hat, so wird, wenn man in der Entfernung FO die Gerade RV der GI parallel führt, diese Gerade den verlangten Mittelpunkt der Schwere enthalten; eben so muß, wenn man in der Entfernung FR die XO der PG parallel führt, diese zweyte Gerade den Mittelpunkt der Schwere enthalten; dieser Mittelpunkt wird also auf diesen beyden Geraden RV, XO zugleich liegen; er muß also in ihrem Durchschnittspunkt F seyn.

Aufgabe.

§. 92.

Den Mittelpunkt der Schwere des Flächenraums eines geradlinigten Vielecks ABCDE Fig. 41. von irgend einer beliebigen Anzahl Seiten zu finden.

Erste Auflösung

nach dem Verfahren der Zusammensetzung der parallelen Kräfte.

Man zerlege den Flächenraum des Polygons durch die aus einem Scheitel A eines und desselben Winkels geführten Diagonalen AD, AC . . . . in Dreyecke, und bestimme nach §. 89, 90 oder 91. die besondern Mittelpunkte der Schwere dieser Dreyecke; betrachtet man dann diese Dreyecke als ihren Flächen proportionale Gewichte und als in ihren Mittelpunkten der Schwere angebracht, so verbinde man die Mittelpunkte der Schwere der beyden ersten Dreyecke ABC, CAD durch

eine Gerade FG, und man findet auf dieser Geraden den Mittelpunkt der Schwere I des Systems der beyden Dreyecke oder des Vierecks ABCD, wenn man die Gerade FG in zwey Theile zerlegt, welche sich umgekehrt wie die Flächen beyder Dreyecke verhalten (§. 18.), welches durch folgende Proportion geschehen kann (§. 20.)

Viereck ABCD : Dreyeck CAD = FC : FI.

Durch den Punkt I und den Mittelpunkt der Schwere H des folgenden Dreyecks, lege man die Gerade HI, auf welcher man den Mittelpunkt der Schwere K des Systems der drey ersten Dreyecke findet, wenn man diese Gerade in zwey Theile zerlegt, welche den Flächen des Vierecks ABCD und des Dreyecks DAE umgekehrt proportional sind, welches durch folgende Proportion geschehen kann

Fünfeck ABCDE : Dreyeck DAE = IH : IK.

Fährt man auf diese Art fort, so kann man, so groß auch die Anzahl der Dreyecke seyn mag, den Mittelpunkt der Schwere ihres Systems finden, und dieser Mittelpunkt wird der des Flächenraums des vorgelegten Vielecks seyn.

Zweyte Auflösung

welche aus der Betrachtung der Momente gezogen ist.

Nachdem man Fig. 42. wie in der vorhergehenden Auflösung den Flächenraum des Polygons in Dreyecke zerlegt, und nachdem man die besondern Mittelpunkte der Schwere F, G, H aller Dreyecke bestimmt hat, ziehe man in der Ebne des Polygons zwey Linien LM, LM nach Belieben, auf welche man aus allen Mittelpunkten

der

der Schwere F, G, H senkrechte fällt; nachdem dieses geschehen, wird der Abstand des Schwerpunktes des Vielecks oder des Systems aller Dreyecke von jeder der Geraden LM, LN gleich seyn der Summe der Momente aller Dreyecke in Rücksicht auf diese Gerade, dividirt durch die Summe ihrer Flächen (§. 65.; der Abstand dieses Mittelpunktes von der Geraden LM wird also seyn

$$\frac{ABC \times Ff + CAD \times Gg + DAE \times Hh}{ABCDE};$$

und dessen Abstand von der Geraden LN wird seyn

$$\frac{ABC \times Ff' + CAD \times Gg' + DAE \times Hh'}{ABCDE}.$$

Führt man also in einem der ersten dieser beyden Entfernungen gleichen Abstand der LM eine Gerade parallel, so wird diese Gerade den Mittelpunkt der Schwere des Vielecks enthalten; desgleichen wird dieser Mittelpunkt der Schwere in der der LN in einem der zweyten dieser Entfernungen gleichen Abstande parallel geführten geraden liegen; mithin wird der Durchschnitt dieser beyden Geraden den gesuchten Mittelpunkt der Schwere geben.

Wenn die Mittelpunkte der Schwere F, G, H der den Flächenraum des Vielecks zusammensetzenden Dreyecke nicht alle von einerley Seite gegen die Geraden LM, LN lägen, so müßte man, um den Abstand des Mittelpunktes der Schwere K des Vielecks von jeder dieser Geraden zu finden, die Momente der Dreyecke, deren Mittelpunkte der Schwere von der andern Seite dieser Geraden liegen, abziehen, anstatt hinzu zu setzen (§. 65.).

Aufgabe.

§. 94.

Der Mittelpunkt der Schwere des Umfangs eines Vielecks ABCDE Fig. 43. von irgend einer Anzahl Seiten zu finden.

Erste Auflösung

durch das Verfahren von der Zusammensetzung der parallelen Kräfte.

Man halbire jede der Seiten des Vielecks in den Punkten F, G, H, I, K, welche die besondern Mittelpunkte der Schwere dieser Seiten seyn werden (§. 88.). Betrachtet man dann die Seiten als ihren Längen proportionale Gewichte, so kann man den Mittelpunkt der Schwere O des Systems von irgend zweyen derselben, wie AB, BC finden, wenn man ihre Mittelpunkte der Schwere durch die Gerade FG verbindet, und diese Gerade in zwey Theile zerlegt, welche diesen Geraden umgekehrt proportional sind, welches (§. 20.) durch folgende Proportion geschehen kann:

$$AB + BC : BC = FG : FO.$$

Nachdem der Punkt O gefunden ist, führe man durch diesen Punkt und durch die Mitte H der folgenden Seite die Gerade OH, auf welcher man den Mittelpunkt der Schwere P des Systems von dreyen Seiten findet, wenn man diese Linie in zwey Theile theilt, welche der Seite CD und der Summe der beyden ersten AB, BC umgekehrt proportional sind; dieses kann durch folgende Proportion geschehen

$$AB + BC + CD : CD = OH : OP.$$

Eben so findet man, wenn die Gerade PI gezogen wird, den Mittelpunkt der Schwere Q des Systems der vier Seiten AB, BC, CD, DE, durch die Proportion

$$AB + BC + CD + DE : DE = PI : PQ.$$

Fährt man auf diese Art fort, so kann man, so groß auch die Anzahl der Seiten des Polygons seyn mag, den Mittelpunkt der Schwere ihres Systems finden, und dieser Mittelpunkt wird der des Umfangs des Polygons seyn.

Zweyte Auflösung,

welche aus der Betrachtung der Momente gezogen ist.

Nachdem man jede der Seiten des Polygons halbirt hat, ziehe man nach Belieben die beyden Geraden LM, LN, auf deren jede man aus der Mitte aller dieser Seiten senkrechte fällt. Nachdem dieses geschehen, wird der Abstand des Mittelpunktes der Schwere R des Systems aller Seiten in Rücksicht auf die Geraden LM, LN gleich seyn der Summe der Momente in Rücksicht auf diese Gerade, dividirt durch die Summe aller Seiten (§. 65.); der Abstand dieses Mittelpunktes von der Geraden LM wird also seyn

$$\frac{AB \times Ff + BC \times Gg + CD \times Hh + DE \times Ii + EA \times Kk}{AB + BC + CD + DE + EA},$$

und sein Abstand von der Geraden LN wird seyn

$$\frac{AB \times Ff' + BC \times Gg' + CD \times Hh' + DE \times Ii' + EA \times Kk'}{AB + BC + CD + DE + EA},$$

Führt man also der LM in einer dem ersten dieser Ausdrücke gleichen Entfernung eine Gerade parallel,

und dann auch der LN in einer dem zweyten Ausdrucke gleichen Entfernung eine parallele Gerade, so wird der Durchschnittspunkt dieser beyden Geraden der Mittelpunkt der Schwere R des Umfangs des Polygons seyn.

Anmerkung.

§. 95.

Wenn die Mitten F, G, H, I, K der Seiten des Polygons von verschiedenen Seiten der Geraden LM, LN lägen, so müßte man, um den Abstand des Mittelpunktes der Schwere R von jeder dieser Geraden zu finden, die Momente der Seiten, deren Mittelpunkte auf der andern Seite liegen, abziehen, anstatt hinzu zu setzen (§. 65.).

Aufgabe.

§. 96.

Den Mittelpunkt der Schwere des körperlichen Raums irgend einer dreyseitigen Pyramide ABCD Fig. 44. zu finden.

Auflösung.

Man bestimme den Mittelpunkt der Schwere F einer der Seitenflächen BCD der Pyramide (§. 90.), indem man vom Scheitel D eines der Winkel dieser Seitenfläche nach der Mitte E, der diesem Winkel entgegen stehenden Seite BC, eine Gerade DE zieht, und auf dieser Geraden einen Punkt F nimmt, welcher vom Scheitel an im Ende des zweyten, oder von der Seite an zu Ende des ersten Drittheils liegt; man ziehe dann die

Gerade AF. Nachdem dieses geschehen, werden, wenn man sich die Pyramide durch Ebnen, welche der Fläche BCD parallel sind, in eine unendliche Anzahl Scheiben zerlegt denkt, alle diese Scheiben dieser Fläche ähnlich seyn, und sie werden von der Geraden AF in Punkten geschnitten werden, welche, weil sie in diesen Scheiben dieselbe Lage haben als der Punkt F in der Fläche BCD, die besondern Mittelpunkte der Schwere dieser Scheiben seyn werden; der Mittelpunkt der Schwere ihres Systems, welcher auch der des körperlichen Raums der Pyramide ist, wird also auf der Geraden AF liegen (§. 28.).

Aus eben dem Grunde wird auch, nachdem man die Gerade AE gezogen, und auf dieser Geraden den Theil EG = $\frac{1}{3}$AE genommen, wodurch der Schwerpunkt G des Flächenraums einer andern Fläche ABC bestimmt wird, die von diesem Punkte nach dem Scheitel D der gegenüber stehenden Ecke der Pyramide gezogene Gerade DG den Mittelpunkt der Schwere des körperlichen Raums der Pyramide enthalten.

Da nun die Geraden AF, DG beyde den Mittelpunkt der Schwere der Pyramide enthalten, so müssen sie sich nothwendigerweise in einem und demselben Punkte H schneiden; und der Durchschnittspunkt dieser beyden Geraden wird der gesuchte Mittelpunkt der Schwere seyn.

Anmerkung.

§. 97.

Man könnte unabhängig von der Betrachtung des Mittelpunktes der Schwere beweisen, daß die Geraden

AF, DG einander nothwendigerweise in einem und demselben Punkte schneiden müssen; denn diese Geraden sind in einerley Ebne, nehmlich in der des Dreyecks ADE.

Erster Zusatz.

§. 98.

Wenn man durch den Scheitelpunkt A einer der Ecken einer dreyseitigen Pyramide, und durch den Mittelpunkt der Schwere F des Flächenraums der gegenüber stehenden Seitenfläche BCD eine Gerade AF zieht, so wird der Mittelpunkt der Schwere H des körperlichen Raums der Pyramide auf dieser Geraden liegen, und zwar zu Ende des ersten Viertheils derselbelben von der Fläche gerechnet, oder zu Ende der drey ersten Viertheile vom Scheitel der Ecke an gerechnet.

Es sey die Gerade GF gezogen, welche der AD parallel seyn wird, weil die Geraden EA, ED in G, F proportional geschnitten sind; die Dreyecke AHD, FHG, deren correspodirende Winkel einander gleich sind, werden also ähnlich seyn, und geben

$$AH : HF = AD : GF;$$

aber die beyden andern ähnlichen Dreyecke AED, GEF geben

$$AD : GF = ED : EF \text{ oder } = 3 : 1 \text{ (§. 90.)}$$

man wird also haben

$$AH : HF = 3 : 1,$$

das heißt $AH = 3HF$ und folglich $HF = \frac{1}{4}AF$, und $AH = \frac{3}{4}AF$.

Zweyter Zusatz.

§. 99.

Man kann auf einer der im §. 91. analogen Art beweisen, daß der Abstand des Schwerpunktes des körperlichen Raums einer dreyeckigen Pyramide von irgend einer Ebne dem vierten Theile der Summe der Entfernungen der Scheitel der vier Ecken der Pyramide von derselben Ebne gleich sey.

Dritter Zusatz.

§. 100.

Der Schwerpunkt O des körperlichen Raums einer Pyramide ABCDEF Fig. 45. von irgend einer Basis, liegt auf der vom Scheitel A nach dem Schwerpunkt G des Flächenraums der Basis geführten Geraden AG, und zwar zu Ende des ersten Viertheils dieser Geraden von der Basis an gerechnet, oder zu Ende des dritten Viertheils vom Scheitel an gerechnet.

Wir wollen uns die Pyramide durch Ebnen, welche der Basis parallel sind, in eine unendlich Anzahl Scheiben zerlegt denken; so werden alle diese Scheiben der Basis ähnlich seyn, und der Punkt, worin jede Scheibe von der Geraden AG geschnitten wird, hat auf dieser Scheibe dieselbe Lage, welche der Punkt G auf der Basis hat; dieser Punkt ist also der Schwerpunkt der Scheibe; und es liegen mithin die Schwerpunkte aller Scheiben auf der Geraden AG; der Schwerpunkt ihres Systems, welcher zugleich der der Pyramide ist, liegt also ebenfalls auf dieser Geraden (§. 28.).

Es sey ferner die Basis durch die Diagonalen BE, BD in Dreyecke zerlegt, und wir wollen uns durch diese Diagonalen und durch den Scheitelpunkt A Ebnen ABE, ABD gelegt denken, wodurch die vorgelegte Pyramide in so viele dreyeckige Pyramiden zerlegt wird, als die Basis Dreyecke hat. Es seyen ferner durch die Schwerpunkte H, I, K der dreyeckigen Grundflächen die Geraden AH, AI, AK gezogen; endlich seyen auf diesen Geraden die Punkte L, M, N zu Ende des ersten Viertheils von der Basis aus genommen; so werden diese Punkte die Mittelpunkte der Schwere der dreyeckigen Pyramide seyn (§ 98.). Dieses vorausgesetzt werden die Punkte L, M, N, welche die vom Scheitel der Pyramide nach der Basis geführten Geraden AH, AI, AK proportional theilen, in einerley der Basis parallelen Ebne liegen; der Schwerpunkt des Systems der dreyeckigen Pyramiden, das heißt, der Schwerpunkt des körperlichen Raums der vorgelegten Pyramide, wird also in derselben Ebne liegen. Da sich nun der Schwerpunkt sowohl in dieser Ebne als in der Geraden AG befinden muß, so wird er in ihrem Durchschnittspunkt O liegen.

Nun wird die Gerade AG durch die Ebne LMN in Theile zerlegt, welche den Theilen der Geraden AH, AI, AK proportional sind; der Schwerpunkt O des körperlichen Raums der Pyramide wird also auf AG im ersten Viertheil von der Basis oder im Ende des dritten Viertheils vom Scheitel an liegen.

Vierter Zusatz.

§. 101.

Der Schwerpunkt des körperlichen Raums eines Kegels von irgend einer Basis ist auf der vom Scheitel nach dem Schwerpunkte der Basis geführten Geraden, zu Ende des ersten Viertheils von der Basis an gerechnet oder zu Ende der drey ersten Viertheile vom Scheitel gerechnet; denn dieser Körper kann als eine Pyramide angesehen werden, deren Basis unendlich viele Seiten hat.

Aufgabe.

§. 102.

Den Schwerpunkt des Flächenraums des im Boden eines Schiffes durch eine horizontale Ebne gemachten Schnitts zu finden.

Auflösung.

Es sey CEHhec Fig. 46. der vorgelegte Schnitt, und AB der Durchschnitt der Ebne dieses Schnitts mit der durch den Kiel des Schiffs gelegten vertikalen Ebne. Es ist klar, daß weil alles von beyden Seiten der Geraden AB symetrisch ist, der verlangte Schwerpunkt K auf dieser Geraden liegen wird; um nun diesen Punkt zu konstruiren, braucht man bloß seinen Abstand AK von einer durch einen gegebenen Punkt auf AB senkrecht geführten Geraden Cc zu kennen.

Es sey in dieser Absicht die Gerade AB durch senkrechte Linien oder Ordinaten Dd, Ee, Ff... in eine so große Anzahl gleicher Theile getheilt, daß die zwischen zweyen neben einander liegenden senkrechten enthaltenen

Bogen CD, DE, EF . . . als gerade Linien angesehen werden können, wodurch der Flächenraum des Schnitts in Trapezia zerlegt wird; es sey ferner jedes dieser Trapezia durch die Diagonalen Cd, De, Ef . . . in Dreyecke zerlegt. Dieses vorausgesetzt, wird, wenn man die Summe der Momente aller Dreyecke in Rücksicht auf die Gerade Cc nimmt, und diese Summe durch die Summe der Flächenräume aller Dreyecke dividirt der Quotient die verlangte Entfernung AK seyn (§. 65.). Nun kann jedes Dreyeck so angesehen werden, als hätte es zur Basis eine der senkrechten, und zur Höhe den den beyden auf einander folgenden senkrechten gemeinschaftlichen Abstand; es wird daher der Flächenraum eines jeden Dreyecks gleich seyn der Hälfte des Produkts der ihm als Basis dienenden Ordinate multiplicirt durch den gemeinschaftlichen Abstand. Zum Beyspiel der Flächenraum des Dreyecks DEe wird gleich seyn der Hälfte des Products Ee × LM; der des Dreyecks Dde wird seyn die Hälfte von Dd × LM, und so von den übrigen. Ferner wird der Abstand des Schwerpunktes eines jeden Dreyecks von der Geraden Cc gleich seyn dem dritten Theile der Summe der Entfernungen der Scheitel seiner drey Winkel von eben dieser Geraden (§. 91.); zum Beyspiel der Abstand des Schwerpunktes des Dreyecks DEe von der Geraden Cc wird seyn ein Drittheil von AL + AM + AM; und so von den übrigen.

Es wird also leicht seyn, die Summe der Flächenräume aller Dreyecke, und die Summe der Momente dieser Flächenräume in Rücksicht auf die Gerade Cc zu finden; und wenn man die zweyte dieser beyden Sum-

men durch die erste dividirt, so erhält man den gesuchten Abstand des Schwerpunktes K von der Geraden Cc.

Die vorhergehende Auflösung ist nicht strenge, weil die Theile CD, DE . . . cd, de . . . des Randes des Schnitts keine gerade Linien sind, wie wir angenommen haben; man sieht aber, daß das Resultat desto genauer wird, je kleiner diese Theile sind, das heißt, je größer die Anzahl der senkrechten ist.

§. 103.

Die eben angezeigte Operation ist einiger Reductionen fähig. Denn nach dem Vorhergehenden ist der Flächenraum des Dreyecks

$$\text{Ccd} \quad AL \times \frac{Cc}{2}$$

der von CDd ist $AL \times \frac{Dd}{2}$

der von Dde ist $AL \times \frac{Dd}{2}$

der von DEe ist $AL \times \frac{Ee}{2}$

der von Eef ist $AL \times \frac{Ee}{2}$

der von EFf ist $AL \times \frac{Ff}{2}$

und so fort. Nimmt man alle diese Produkte zusammen, so wird man finden, daß ihre Summe gleich ist dem Produkt aus dem gemeinschaftlichen Faktor AL, multiplicirt durch die Summe, welche aus der Hälfte der beyden äußern senkrechten, und der Summe aller übrigen gebildet wird.

Was die Momente dieser Dreyecke gegen die Gerade Cc anbelangt, so ist das des Dreyecks

$$\text{Ccd} \quad AL \times \frac{Cc}{2} \times \frac{AL}{3}$$

das von CDd ist $AL \times \frac{Dd}{2} \times \frac{2AL}{3}$

das von Dde ist $AL \times \frac{Dd}{2} \times \frac{4AL}{3}$

das von DEe ist $AL \times \frac{Ee}{2} \times \frac{5AL}{3}$

das von Eef ist $AL \times \frac{Ee}{2} \times \frac{7AL}{3}$

das von EFf ist $AL \times \frac{Ff}{2} \times \frac{8AL}{3}$

und so fort; woraus man sieht, daß die Zahl, welche AL im Momente des letzten Dreyecks multiplicirt, immer gleich ist drey Mahl der Anzahl der Intervallen weniger eins, oder welches auf eins hinaus kommt, dem Dreyfachen der Anzahl der letzten senkrechten weniger 4. Nimmt man alle diese Momente zusammen, so ist ihre Summe gleich dem Producte aus dem gemeinschaftlichen Faktor AL × AL, multiplicirt durch die Summe, welche aus dem sechsten Theil der ersten senkrechten, dem sechsten Theile der letzten senkrechten multiplicirt durch das Dreyfache der Anzahl der senkrechten weniger 4; dann aus der zweyten senkrechten, dem doppelten dritten, dem dreyfachen der vierten, und so fort gebildet wird.

Da nun die Summe der Momente und die der Flächenräume den gemeinschaftlichen Faktor AL haben, so wird ihr Quotient noch derselbe bleiben, wenn man die-

sen Faktor in beyden Gliedern der Division hinweg läßt; um also den Abstand des Schwerpunktes K von einer der äußern Ordinaten Cc zu finden, muß man

1) den sechsten Theil der ersten Ordinate Cc nehmen; den sechsten Theil der letzten Ordinate Hh multiplicirt durch das Dreyfache der Anzahl der Ordinaten weniger 4; dann die zweyte Ordinate, das Doppelte der dritten, das Dreyfache der vierten .... und so fort, welches eine erste Summe geben wird. 2) Muß man zur Hälfte der beyden äußern Ordinaten alle dazwischen liegende hinzu setzen, welches eine zweyte Summe geben wird; 3) muß man die erste dieser beyden Summen durch die zweyte dividiren, und den Quotienten durch den gemeinschaftlichen Abstand der Ordinaten multipliciren.

Aufgabe.

§. 104.

Den Schwerpunkt des Volumens des eingetauchten Theils des Schiffraums zu finden.

Auflösung.

Wir wollen annehmen, daß das Schiff flott gemacht, daß der Kiel horizontal sey, und daß die durch den Kiel geführte senkrechte Ebne das Volumen des Schiffraums in zwey völlig symetrische Theile theile; dieses vorausgesetzt, wird der Schwerpunkt des eingesenkten Theils in dieser Ebne liegen, und die Aufgabe darauf zurückgeführt seyn, die Entfernung dieses Punk-

tes auf zweyen in der vertikalen Ebne der Lage nach bekannten Geraden zu finden.

Es seyen ABCDE der Schnitt des Schiffes durch eine vertikale Ebne, CD sein Kiel, und wir wollen annehmen, daß der in der Richtung der Oberfläche des Wassers im Schiffe gemachte Schnitt durch die dem Kiele parallele Gerade Bb vorgestellt sey. Es sey der Zwischenraum der beyden Geraden Bb, CD in einer gewissen Anzahl gleicher Theile BB′, B′B″, B″B‴ .... getheilt, und durch jeden Theilpunkt denke man sich horizontale durch B′b′, B″b″ .... vorgestellte Schnitte. Desgleichen sey die Gerade Bb vom Punkte B aus in gleiche Theile BF, FF′, F′F″ .... getheilt, und durch jeden Theilpunkt denke man sich vertikale auf dem Kiel senkrechte, und durch die Geraden BB‴, Ff, F′f′ .... vorgestellte Ebnen; der eingesenkte Theil des Schiffs wird in rechtwinklichte Prisma zerlegt seyn, deren Kanten auf der durch den Kiel geführten vertikalen Ebne senkrecht seyn werden, und welche sich von beyden Seiten an der Oberfläche des Schiffs endigen werden. (Die Abtheilungen der Geraden BB‴, Bb müssen klein genug seyn, damit der Theil der Oberfläche des Schiffs, welcher jedes Prisma begränzt, als eben angesehen werden kann). Endlich sey jedes durch seine Basis LMNP vorgestellte Prisma, durch eine durch MP vorgestellte diagonale Ebne in zwey dreyeckige Prisma zerlegt.

Dieses vorausgesetzt, so kann 1) jedes dreyeckige Prisma in drey Pyramiden mit dem Prisma von einerley Basis zerlegt werden, deren jede eine der Kanten des Prisma zur Höhe haben wird; wenn man also nach

den wirklichen im Schiffe abgenommenen Maaßen die Länge aller Gränzen hat, so ist es leicht den körperlichen Raum jeder Pyramide zu finden, wenn man den Flächenraum der gemeinschaftlichen Basis LMP durch den dritten Theil der der Pyramide als Höhe dienenden Gränze multiplicirt; und nimmt man die Summe aller dieser körperlichen Räume, so hat man den des eingesenkten Theils des Schiffs. 2) Da das Moment einer dreyeckigen Pyramide in Rücksicht auf eine Ebne gleich ist dem Produkte aus dem körperlichen Raum dieser Pyramide in den vierten Theil der Summe der Entfernungen der Scheitel ihrer vier Ecken von eben dieser Ebne (99.), so wird es leicht seyn, das Moment einer jeden Pyramide gegen die vertikale Ebne BB''', oder gegen die horizontale Ebne CD zu finden, weil die Entfernungen der Scheitel ihrer Ecken von jeder dieser Ebnen bekannt ist; und nimmt man die Summe aller dieser Momente, so erhält man das Moment des eingesenkten Theils des Schiffs.

Nachdem dieses geschehen, wird der Quotient aus der Summe der Momente gegen die vertikale Ebne BB''' durch die Summe der körperlichen Räume dividirt, die Entfernung KX des verlangten Schwerpunktes von der vertikalen Ebne BB''' geben; desgleichen wird der Quotient aus der Summe der Momente in Rücksicht auf die horizontale Ebne CD, durch die Summe der körperlichen Räume dividirt, die Entfernung KY eben dieses Punktes vom Kiel geben. Man hat also die Entfernungen des Schwerpunktes von zweyen in der durch den Kiel gelegten vertikalen Ebne der Lage nach bekann-

ten Geraden, und die Lage dieses Punktes ist folglich bestimmt.

Die vorhergehende Auflösung ist nicht strenge, weil die Oberfläche des Schiffs krumm ist, und daher der Theil dieser Fläche, welcher jedes dreyeckigte Prisma begränzt, nicht, wie angenommen worden, als eben betrachtet werden kann; man sieht aber leicht ein, daß das Resultat desto genauer wird, je mehr man die Anzahl der Abtheilungen, sowohl nach der Richtung der Länge des Schiffs, als dessen Höhe vervielfältigt.

§. 105.

Die eben angezeigte Operation ist einiger Reduktionen fähig, und wenn man wie in §. 103. schließt, so wird sich finden, daß man, um die Entfernung KX des Schwerpunktes des eingesenkten Theils des Schiffs von der vertikalen Ebne BA''' zu finden, 1) für jeden horizontalen Schnitt den sechsten Theil der ersten Ordinate nehmen muß, welche in der Ebne BB''' liegt, den sechsten Theil der letzten multiplicirt durch das Dreyfache der Anzahl der in diesem Schnitte enthaltenen Ordinaten weniger 4; dann die zweyte Ordinate, das Doppelte der dritten, das Dreyfache der vierten ...., welches für jeden Schnitt eine besondere Summe geben wird; dann muß man die Hälfte der ersten dieser Summen, die Hälfte der letzten, und alle dazwischen liegenden zusammen nehmen, welches einen Dividendus bilden wird. 2) Muß man zum vierten Theile der in den Winkeln des Rechtecks Bbb'''B''' liegenden Ordi-

vier Ordinaten die Hälfte aller derer, welche auf dem Umfange dieses Rechtecks liegen, und gänzlich alle diejenigen, welche innerhalb liegen, hinzusetzen; dieses wird den Divisor bilden. 3) Muß man den Dividendus durch den Divisor dividiren, und den Quotienten durch die der gesuchten Entfernung KX parallele BF multipliciren.

Um den Abstand KY des Schwerpunktes von der durch den Kiel geführten horizontalen Ebne zu finden, muß man bey den vertikalen Schnitten eben so verfahren, wie wir im vorhergehenden Falle mit den horizontalen Schnitten verfahren haben; das heißt 1) für jeden vertikalen Schnitt den sechsten Theil der untern Ordinate, den sechsten Theil der in der Wasserfläche befindlichen, multiplicirt durch das Dreyfache der Anzahl der Ordinaten des Schnitts weniger 4; dann die zweyte Ordinate, von unten an gerechnet, das Doppelte der dritten, das Dreyfache der vierten ...., welches für jeden Schnitt eine besondre Summe geben wird; endlich muß man die Hälfte der erstern dieser Summen, die Hälfte der letztern und alle dazwischen liegende zusammen nehmen, welches einen Dividendus bilden wird. 2) Muß man diesen Dividendus durch eben den Divisor als im vorhergehenden Fall dividiren, und den Quotienten durch den dem gesuchten Abstande KY parallelen Theil BB′ multipliciren.

Anmerkung.

§. 106.

In der vorhergehenden Aufgabe hatte man bloß

Bayerische Staatsbibliothek München

zum Gegenstande, den Schwerpunkt des Volumens des vom Schiffe verdrängten Wasserkörpers zu finden. Wenn es indessen darauf ankäme den Schwerpunkt des Schiffs selbst, es sey nun belastet oder unbelastet, das heißt die Entfernungen dieses Punktes von der durch den Kiel geführten horizontalen Ebne und von der auf dem Kiel senkrechten vertikalen Ebne zu finden; so müßte man in Rücksicht auf jede dieser Ebnen die Summe der Momente aller das Schiff und seine Last zusammen setzenden Theile nehmen, und jede dieser Summen durch das ganze Gewicht des Schiffs und seiner Last dividiren; jedoch muß man, um die Momente zu nehmen, nicht das Volumen, sondern das Gewicht eines jeden Theils in die Entfernung des Schwerpunktes dieses Theils von der Ebne, in Rücksicht deren die Momente genommen werden, multipliciren; und die Quotienten dieser Abtheilungen werden die gesuchten Entfernungen seyn.

Was den besondern Schwerpunkt eines jeden der Theile des Schiffs und seiner Last betrifft, so ist es leicht, ihn wenigstens auf eine annähernde Art zu finden, weil man diesen Theil immer in Parallelepipeda, in Cylinder, in Pyramiden oder in andre Körper zerlegen kann, deren Schwerpunkt zu finden wir oben die Mittel angegeben haben.

Viertes Kapitel.

Vom Gleichgewicht der Maschienen.

§. 107.

Eine Maschiene nennt man jedes Instrument, welches zum Zwecke hat, die Wirkung einer bestimmten Kraft auf einen Punkt über zu tragen, welcher sich nicht auf ihrer Richtung befindet, so daß diese Kraft einen Körper, an welchem sie nicht unmittelbar angebracht ist, in Bewegung setzen, und zwar nach einer Richtung bewegen kann, welche von seiner eignen verschieden ist.

§. 108.

Im Allgemeinen kann die Richtung einer Kraft nur dadurch geändert werden, daß man diese Kraft in zwey andre zerlegt, deren eine gegen einen festen Punkt gerichtet ist, welcher sie vermöge seines Wiederstandes aufhebt, und deren andre nach der neuen Richtung wirkt; diese letztere Kraft, welche die einzige ist, die einigen Effekt hervorbringen kann, ist immer eine aus der ersten zusammengesetzte, und nach den verschiedenen Umständen kann sie entweder kleiner oder größer als dieselbe seyn. Verändert man auf diese Art die Richtungen und die Größen der Kräfte, so kann man vermittelst einer Maschiene und der Unterstützungspunkte, welche sie darbiethet, zwey ungleiche Kräfte, welche nicht nach gerade entgegengesetzter Richtung wirken, ins Gleichgewicht bringen.

§. 109.

Die Kraft, deren Richtung man durch Anwendung einer Maschiene ändern will, wird im besondern Sinne mit dem Nahmen Kraft belegt, und man nennt Last denjenigen Körper, welcher bewegt werden soll, oder diejenige, der man vermittelst der Maschiene das Gleichgewicht halten will.

§. 110.

Wir haben hier bloß zur Absicht, die Verhältnisse aufzufinden, welche die an einer Maschiene angebrachte Kraft und Last zu einander haben müssen, um zwischen sie, mit Rücksicht auf ihre Richtungen, ein Gleichgewicht herzustellen. Wir werden die Reibung (Friktion) außer Acht lassen, das heißt die Hindernisse, welche die verschiedenen Theile der Maschiene erleiden, um an einander fortgeschoben werden zu können; und wenn Seile in den Maschienen vorkommen, werden wir sie als vollkommen biegsam annehmen. Nachdem man also einer Kraft die Größe gegeben hat, welche dem Zustande des Gleichgewichts unter dieser Annahme angemessen ist, würde man sie nur noch um eine sehr geringe Größe vergrößern müssen, um das Gleichgewicht aufzuheben, und die Maschiene in Bewegung zu setzen; sie müßte vorher um alle die Größen vermehrt werden, welche zur Ueberwindung der Hindernisse, deren wir eben Erwähnung gethan, nöthig sind, und dann würde ein geringer Zusatz die Bewegung hervor bringen.

§. 111.

Obgleich die Anzahl der Maschienen beträchtlich

groß ist, so kann man sie doch alle als aus dreyen einfachen Maschienen zusammen gesetzt betrachten, welche sind: die Seile, der Hebel und die schiefe Ebne. Wir werden uns begnügen, die Theorie dieser drey Maschienen und der aus ihnen unmittelbar hergeleiteten auseinander zu setzen; es wird alsdann leicht seyn durch einfache Anwendungen das Verhältniß der Kraft zur Last für den Fall des Gleichgewichts einer jeden Maschiene zu finden, so zusammen gesetzt sie auch seyn mag.

Von dem Gleichgewicht der Kräfte, welche auf einander vermittelst Seile wirken.

§. 112.

Wir werden die Seile ohne Schwere annehmen; und da ihre Fähigkeit, die Kräfte überzutragen, von ihrer Dicke unabhängig ist, so werden wir sie als auf ihre Axen reducirt, und daher als gerade biegsame oder unbiegsame Linien betrachten. Dieses vorausgesetzt, wollen wir zuvörderst den Fall des Gleichgewichts zwischen den dreyen Kräften P, Q, R Fig. 48. betrachten, welche aufeinander vermittelst der drey durch den Knoten A verbundenen Seile wirken.

1) Die drey Kräfte P, Q, R können nicht im Gleichgewichte seyn, wofern nicht ihre drey Richtungen, und folglich die Seile, vermöge welcher sie ihre Wirkungen übertragen, in einerley Ebne liegen (§. 29.).

2) Wenn man irgend zwey dieser Kräfte, zum Beyspiel die beyden Kräfte P, Q, durch die Theile AD, AC ihrer Richtungen vorstellt, und aus diesen Seiten das

Parallelogramm ACBD construirt: so wird die Diagonale AD die aus diesen beyden Kräften zusammengesetzte ihrer Größe und ihrer Richtung nach vorstellen (§. 36.); da nun die drey Kräfte im Gleichgewichte sind, so muß die Kraft R der aus den beyden andern zusammengesetzten gleich und gerade entgegengesetzt seyn; die Richtung der Kraft R wird also in der Verlängerung von BA liegen, und ihre Größe wird durch diese Diagonale dargestellt seyn; man wird also haben

$$P : Q : R = AC : AD : AB,$$

oder, weil die Seiten AD, BC des Parallelogramms gleich sind, so werden sich die drey Kräfte P, Q, R zu einander wie die Seiten des Dreyecks ABC verhalten.

§. 113.

Da die Winkel des Dreyecks ABC durch die Richtungen der Kräfte P, Q, R gegeben, und die Größen seiner Seiten den dieser Kräfte proportional sind, so folgt, daß wenn von den sechs Stücken, welche im gegenwärtigen Fall des Gleichgewichts betrachtet werden können, irgend drey gegeben sind, die andern drey in allen den Fällen gefunden werden können, in welchen sich aus dreyen bekannten Stücken des Dreyecks ABC die andern drey bestimmen lassen.

Wenn zum Beyspiel die drey Kräfte P, Q, R bekannt sind, so kann man die Winkel finden, welche die Seile mit einander bilden müssen, um im Gleichgewichte zu seyn, wenn man das Dreyeck ABC konstruirt, dessen Seiten diesen Kräften proportional sind. Wenn aber die Richtungen gegeben sind, so kann man nur das Ver-

hältniß dieser drey Kräfte kennen, weil im Dreyecke ABC die Kenntniß der drey Winkel nur das Verhältniß der Seiten und nicht ihre Größe bestimmt. Man muß also wenigstens die Größe einer der drey Kräfte P, Q, R kennen, um die der beyden andern durch die proportionale Reihe

$$P : Q : R = AC : BC : AB$$

zu finden.

Erste Anmerkung.

§. 114.

Wenn die drey Seile durch einen beweglichen Knoten vereinigt sind, wenn z. B. das Seil PAQ durch den am äußersten Ende des Seils RA Fig. 49. befestigten Ring geht, so sind die eben vorgetragenen Bedingungen zur Herstellung des Gleichgewichts nicht hinreichend; es müssen alsdann noch die von den beyden Theilen des Seils, und der Verlängerung AB der Richtung des andern Seils gebildeten Winkel PAB, QAB einander gleich seyn; denn es wird offenbar im entgegengesetzten Falle der Ring A zur Seite des größern dieser beyden Winkel an dem Seile hinab gleiten.

Zweyte Anmerkung.

§. 115.

Was wir eben gesagt haben begreift die ganze Theorie des Gleichgewichts zwischen dreyen Kräften, welche an den durch einen und denselben Knoten verbundenen Seilen angebracht sind; wir haben aber dabey die Konstruktion des Parallelogramms ACBD vorausgesetzt,

und man kann diese Theorie unabhängig von jeder Konstruktion vortragen.

Denn in jedem Dreyecke ABC sind die Seiten den Sinus der gegenüber stehenden Winkel proportional, das heißt man hat

$$AC : BC : AB = \sin ABC : \sin BAC : \sin ACB;$$

nun sind die Sinus dieser Winkel respectiv den ihrer Supplemente RAQ, RAP, PAQ gleich; man hat also auch

$$AC : BC : AB = \sin RAQ : \sin RAP : \sin PAQ,$$

und folglich

$$P : Q : R = \sin RAQ : \sin RAP : \sin PAQ;$$

das heißt: **wenn drey an Seilen vermittelst eines Knotens wirkende Kräfte im Gleichgewichte sind, so verhält sich eine jede derselben wie der Sinus des von den Richtungen der beyden andern gebildeten Winkels.**

Erster Zusatz.

§. 116.

Wenn die Seile AP, AQ Fig. 50. anstatt von zweyen Kräften gezogen zu werden, an zweyen festen Punkten in P und Q befestigt, und die Kraft R durch die Diagonale AB des Parallelogramms ABCD ausgedrückt ist, so werden die beyden Seiten AC, AD die Spannungen dieser beyden Seile, oder das Bestreben ausdrücken, welches sie auf die festen Punkte nach der Seite ihrer Richtungen ausüben.

Zweyter Zusatz.

§. 117.

Wenn der Winkel PAQ sehr groß ist, so sind die Seiten AC, AD des Parallelogramms in Rücksicht auf die Diagonale AD sehr groß, und folglich sind die Wirkungen, welche die Kraft R auf die festen Punkte PQ ausübt, um sie einander zu nähern, gegen diese Kraft beträchtlich groß. Man kann also vermittelst der Seile mit einer mittelmäßigen Kraft eine sehr große Wirkung hervorbringen.

Dritter Zusatz.

§. 118.

Im Falle des Gleichgewichts wird, so klein auch die Kraft R seyn mag, die sie ausdrückende Diagonale AB niemals Null, und die drey Punkte C, A, D sind nicht in gerader Linie; nimmt man also an, daß ein Seil PAQ ohne Schwere durch zwey Kräfte P, Q in gerader Linie ausgedehnt wird, so wird eine noch so kleine in A angebrachte Kraft R es in diesem Punkte spannen, und dadurch einen Winkel PAQ bilden. Strenge genommen ist es also unmöglich ein schweres Seil nach einer geraden Linie auszuspannen, wenigstens wenn diese nicht vertikal ist; denn die Gewichte der es zusammensetzenden Theile, können als an diesem Seile angebrachte Kräfte angesehen werden, welche es also nothwendigerweise aus der geraden Richtung bringen müssen.

Vierter Zusatz.

§. 119.

Wenn eine beliebige Anzahl Kräfte P, Q, R, S, T, Fig. 51. auf einander durch Seile wirken, von denen je drey und drey in einem und demselben Knoten vereinigt sind, so kann man nach dem Vorhergehenden leicht die Verhältnisse finden, welche diese Kräfte mit Rücksicht auf ihre Richtungen zu einander haben müssen, um im Gleichgewicht zu seyn; denn das Gleichgewicht aller kann nicht statt haben, wofern nicht 1) die drey durch jeden Knoten verbundenen Kräfte unter einander im Gleichgewichte sind; 2) wofern nicht die Seile AB, BC, welche zwey Knoten verbinden, nach beyden Richtungen gleiche Spannung haben. Bezeichnet man also die Spannungen der beyden Seile AB, BC, durch U, X, so wird man wegen des Gleichgewichts um den Knoten A haben (§. 115.)

$$P : Q = \sin QAB : \sin PAB,$$
$$P : U = \sin QAB : \sin PAQ;$$

das Gleichgewicht um den Knoten B giebt

$$U : R = \sin RBC : \sin ABC,$$
$$U : X = \sin RBC : \sin ABR;$$

das Gleichgewicht um den Knoten C giebt

$$X : S = \sin SCT : \sin BCT$$
$$X : T = \sin SCT : \sin BCS.$$

Und setzt man diese Proportionen fort, so wird man das Verhältniß irgend zweyer dieser Kräfte, so wie das Verhältniß einer derselben zur Spannung U, X irgend eines Seils finden können.

Multiplicirt man zum Beyspiel die zweyte und die dritte Proportion nach der Ordnung, so findet man

$$P : R = \sin QAB \times \sin RBC : \sin PAQ \times \sin ABC.$$

Multiplicirt man die zweyte und vierte, so findet man

$$P : X = \sin QAB \times \sin RBC : \sin PAQ \times \sin ABR.$$

Wird die zweyte, vierte und fünfte multiplicirt, so erhält man

$$P : S = \sin QAB \times \sin RBC \times \sin SCT : \sin PAQ \times \sin ABR \times \sin BCT$$

und so fort.

Hieraus folgt auch, daß die drey durch einen und denselben Knoten verbundenen Seile in einerley Ebne liegen (§. 112.), obgleich die um zwey Knoten vereinigten in verschiedenen Ebnen liegen können.

Fünfter Zusatz.

§. 120.

Wenn die Kräfte Q, R, S Gewichte sind, welche durch die Knoten A, B, C an einem und demselben Seile EABCF Fig. 52. angebracht sind, und dieses Seil mit seinen beyden Enden an zweyen festen Punkten E, F befestigt ist, so werden

1) das ganze Seil und die Seile der Gewichte Q, R, S in einerley vertikalen Ebne liegen; denn die beyden Theile EA, AB des Seils liegen in der durch das Seil AQ geführten vertikalen Ebne; desgleichen sind die beyden Theile AB, BC, in der durch BR geführten vertikalen Ebne; nun gehen diese beyden vertikalen Ebnen durch eine und dieselbe Gerade AB, und fallen zusammen; es werden daher die Theile EA, AB, BC des

Seils, und die Richtungen der Seile AQ, BR in einerley vertikalen Ebne liegen. Auf eben diese Art läßt sich beweisen, daß der Theil CF des Seils und die Richtung CS in eben dieser Ebne liegen, und so fort.

2) Die Spannungen der beyden äußern Theile des Seils verhalten sich zu einander umgekehrt wie die Sinus der Winkel, welche diese Theile mit der vertikalen machen; denn die Winkel QAB, ABR sind Supplemente zu einander und haben einerley Sinus; eben so verhält es sich mit den Winkeln RBC, BCS und so fort. Läßt man nun in der Proportion, welche das Verhältniß der beyden äußersten Spannungen P, T angiebt (§. 119.) die gemeinschaftlichen Faktoren hinweg, so erhält man

$$P : T = \sin SCT : \sin PAQ.$$

3) Die durch den Durchschnittspunkt G der Verlängerungen der beyden äußern Theile des Seils geführte vertikale HI, geht durch den Schwerpunkt des Systems aller Gewichte Q, R, S ....; denn da die beyden äußern Theile in einerley Ebne liegen, so haben ihre Spannungen eine Zusammengesetzte, deren Richtung durch den Punkt G geht; da ferner diese Spannungen das System der Gewichte Q, R, S .... erhalten, so muß ihre Zusammengesetzte vertikal seyn, und durch den Schwerpunkt dieser Gewichte gehen; es werden demnach der Punkt G und der Schwerpunkt der Gewichte Q, R, S in einer und derselben vertikalen liegen.

Sechster Zusatz.

§. 121.

Wenn ein schweres Seil EHF an zweyen festen Punkten E, F Fig. 53. im Gleichgewicht aufgehängt ist, so kann man dessen Axe als einen Faden ohne Schwere betrachten, der nach seiner ganzen Ausdehnung mit vertheilten Gewichten belastet ist. Es ist demnach 1) diese Axe in der durch die beyden Aufhängepunkte gelegten vertikalen Ebne; 2) Wenn man die Richtungen der beyden äußersten Elemente dieser Axe in EG, FG verlängert, und durch den Durchschnittspunkt G die vertikale IH legt, so werden sich die Spannungen dieser beyden Elemente umgekehrt wie die Sinus der Winkel verhalten, welche diese Elemente mit der vertikalen einschließen, das heißt, wenn diese Spannungen durch P, T bezeichnet werden, so hat man

$$P : T = \sin IGF : \sin IGE;$$

3) liegt der Schwerpunkt K des Seils in der vertikalen IH.

Betrachtet man endlich das ganze Gewicht Z des Seils als eine im Punkte G ihrer Richtung angebrachte Kraft, so findet man die Kraftäußerungen des Seils auf die Unterstützungspunkte E, F nach den Richtungen EG, FG, wenn man diese Kraft Z in zwey andre zerfällt, welche nach diesen Richtungen wirken, und man wird haben (§. 115.)

$$Z : P : T = \sin EGF : \sin IGF : \sin IGE.$$

Anmerkung.

§. 122.

Bisher haben wir vorausgesetzt, daß keine drey Seile an jedem Knoten vereinigt sind, weil es, wenn die Anzahl der in einem und demselben Knoten vereinigten und in einerley Ebne liegenden Seile größer ist, nicht hinreichend ist, ihre Richtungen zu kennen, um die Verhältnisse zu finden, welche die an ihnen angebrachten Kräfte zu ihrem Gleichgewichte nothwendig machen; das heißt, diese Verhältnisse können auf eine unendliche Anzahl Arten Veränderungen erleiden, ohne daß sie aufhören im Gleichgewichte zu seyn.

Denn die Anzahl der in einer und derselben Ebne wirkenden Kräfte mag seyn, welche sie wolle, so ist bloß zu ihrem Gleichgewichte um einen und denselben Knoten erforderlich, daß die aus irgend zweyen derselben zusammengesetzte der aus allen übrigen zusammengesetzten gleich und gerade entgegengesetzt sey; wenn daher alle diese Kräfte außer zwey nach Belieben genommen sind, welches die Größe und Richtung ihrer Zusammengesetzten bestimmt, so kann man die Größe dieser beyden letztern finden, welche dieser Zusammengesetzten das Gleichgewicht halten.

Wenn indessen vier um einen und denselben Knoten verbundene Seile nicht in einerley Ebne liegen, so sind doch, wenn ihre Richtungen gegeben sind, die Verhältnisse der Größen, welche die zu ihrem Gleichgewichte daran anzubringenden Kräfte haben müssen, bestimmt; denn wir haben (§. 43.) gesehen, daß sich diese Kräfte

zu einander verhalten müssen, wie die Diagonale und die an einander stoßenden Kanten des auf ihren Richtungen konstruirten Parallelepipedums. Wenn aber die Kräfte nicht in einerley Ebne wirken, und die Anzahl derselben größer als vier ist, so sind die Verhältnisse der Kräfte aus den Richtungen der Seile nicht bestimmt.

Vom Hebel.

§. 123.

Der Hebel ist ein unbiegsamer gerader oder krummer, und um einen seiner Punkte C beweglicher Stab ACB Fig. 54 oder CAB Fig. 55., welcher vermittelst irgend eines Hindernisses befestigt ist, und dieses Hinderniß wird der **Unterstützungspunkt** (die **Unterlage**) genannt.

§. 124.

Wir wollen zuvörderst annehmen, daß der Hebel ohne Schwere sey, daß er auf keine Art sich über die Unterlage hinweg bewegen kann, und daß zwey Kräfte P, Q entweder unmittelbar oder vermittelst der Seile AP, BQ an zweyen Punkten A, B des Hebels angebracht sind. Betrachtet man nun den Wiederstand der Unterlage C als den Effekt einer dritten in eben demselben Punkte des Hebels angebrachten Kraft, so haben wir gesehen, daß für den Fall des Gleichgewichts zwischen diesen dreyen Kräften 1) ihre Richtungen in einerlerley Ebne liegen und in einem und demselben Punkte D zusammen laufen (§. 30.);

2) daß sich die Kräfte P, Q umgekehrt wie die von der Unterlage auf ihre Richtungen gefällten senkrechten CE, CF verhalten (§. 35.), das heißt man hat

$$P : Q = CF : CE;$$

3) daß, wenn vom Punkte D aus auf die Richtungen der Kräfte P, Q die Geraden DL, DM den Größen dieser Kräfte proportional getragen werden, und das Parallelogramm DLMN vollendet wird, die Diagonale DN, die Größe und Richtung der Kraft R, und folglich den Wiederstand der Unterlage darstellen wird (§. 35.); man wird also haben

$$P : Q : R = DL : DM \text{ oder } NL : DN,$$

oder (§. 115.)

$$P : Q : R = \sin QDR : \sin PDR : \sin PDQ.$$

Erster Zusatz.

§. 125.

Läßt man den Widerstand der Unterlage außer Acht, das heißt, nimmt man an, daß diese Unterlage eines unbestimmten Widerstandes fähig ist, so ist zum Gleichgewichte der beyden Kräfte P, Q um diesen Punkt des Hebels erforderlich, 1) daß ihre Richtungen und der Punkt der Unterlage in einerley Ebne liegen; 2) daß die beyden Kräfte P, Q den Hebel um diesen Punkt C nach entgegengesetzten Richtungen zu bewegen streben, und daß ihre Momente in Rücksicht auf diesen Punkt gleich seyen, das heißt, man muß haben (§. 68.)

$$P \times CE = Q \times CF.$$

Zwey-

Zweyter Zusatz.

§. 126.

Man sieht hieraus, daß man der Kraft Q, sie mag so klein seyn wie sie wolle, vermittelst des Hebels, um den Punkt der Unterlage C mit einer der Größe und Richtung nach gegebenen Last P ins Gleichgewicht setzen kann; denn da die Richtung der Last P bekannt ist, so wird der Abstand CE dieser Richtung von der Unterlage ebenfalls bekannt seyn; man hat also das Moment P × CE, und es ist auf diese Art nur noch nöthig zu bewirken, daß das Moment Q × CF der Kraft dem vorhergehenden gleich werde, das heißt, diese Kraft dergestalt anzubringen, daß ihr Abstand CF von der Unterlage gleich $\frac{P \times CE}{Q}$ werde, und daß sie den Hebel nach einer der der Last P entgegengesetzten Richtung zu bewegen strebe.

2) Wenn der Abstand CF der Richtung der Kraft Q von der Unterlage bekannt ist, so findet man die Größe, welche diese Kraft haben muß, um der Last P das Gleichgewicht zu halten, wenn man das Moment dieser letztern Kraft durch den Abstand CF dividirt, das heißt, man wird haben $Q = \frac{P \times CE}{CF}$.

Dritter Zusatz.

§. 127.

Da der Druck oder die Pressung, welche die Unterlage C erleidet, der aus den beyden Kräften P, Q zu-

sammengesetzten gleich ist, so findet man diese Pressung durch folgende proportionale Reihe

$$P : Q : R = \sin QDR : \sin PDR : \sin PDQ,$$

das heißt man wird haben

$$R = \frac{P \times \sin PDQ}{\sin QDR},$$

oder $$R = \frac{Q \times \sin PDQ}{\sin PDR}.$$

Vierter Zusatz.

§. 128.

Wenn also der Wiederstand der Unterlage nicht unbegränzt ist, so muß derselbe nach der Richtung CD, um dem Gleichgewichte gehörig zu wiederstehen, der aus den beyden Kräften P, Q zusammen gesetzten, das heißt $P \times \frac{\sin PDQ}{\sin QDR}$, oder welches auf eins hinaus kommt, $\frac{Q \times \sin PDQ}{\sin PDR}$ gleich seyn.

Fünfter Zusatz.

§. 129.

Ueberhaupt kann man, wenn von den sechs Stücken, welche im Gleichgewichte des Hebels vorkommen, nehmlich die Größen und die Richtungen der beyden Kräfte P, Q und die des Drucks der Unterlage, drey gegeben sind, die übrigen drey in allen Fällen bestimmen, in welchen von den sechs analogen Stücken im Dreyecke DEN, nehmlich den Seiten und Winkeln desselben, aus drey gegebenen die übrigen drey gefunden werden können.

Erste Anmerkung.

§. 130.

Wenn der Hebel auf der Unterlage eine Bewegung annehmen kann, so sind die eben vorgetragenen Bedingungen nicht hinreichend, jede Bewegung desselben zu verhindern und das Gleichgewicht herzustellen; es muß alsdann überdieß die Richtung DC der Pressung der Unterlage auf der Oberfläche des Hebels im Punkte C senkrecht seyn; denn wenn diese Richtung schief wäre, so würde der Hebel ein Bestreben äußern, gegen die Seite des größern Winkels abzugleiten, und würde dies in allen den Fällen wirklich thun, wo dieses Bestreben größer ist als die Reibung der Unterlage, die sich diesem Effekt entgegensetzt, wie wir bey der Lehre von der schiefen Ebne zeigen werden.

Zweyte Anmerkung.

§. 131.

Was wir eben gesagt haben, begreift die ganze Theorie des Gleichgewichts zweyer an einem Hebel angebrachten Kräfte, wenn dieser letztere ohne Schwere gedacht und von einer Unterlage zurückgehalten wird; wir wollen nun hiervon auf einige leichte Fälle eine Anwendung machen,

Wenn die Richtungen der am Hebel angebrachten Kräfte P, Q Fig. 56. einander parallel sind, wenn dies zum Beyspiel zwey in den Punkten A, B aufgehängte Gewichte sind, so wird die Last, welche ihr Unterstützungspunkt C tragen muß, ihrer Summe P + Q

gleich seyn, und die beyden vom Unterstützungspunkt auf ihre Richtungen gefällten senkrechten CE, CF werden in gerader Linie liegen. Wenn also der Hebel gerade ist, werden die Dreyecke ACE, BCF einander ähnlich seyn, und geben

$$CF : CE = CB : CA$$

man hat also für den Fall des Gleichgewichts

$$P : Q = CB : CA;$$

das heißt die Gewichte P, Q verhalten sich zu einander umgekehrt, wie ihre Hebelsarme.

Wenn also die Größe und der Hebelsarm einer Kraft P gegeben ist, so wird

1) der Hebelsarm, welchen man einer Kraft Q geben muß, um der ersten das Gleichgewicht zu halten

$$CB = \frac{P \times CA}{Q}$$

seyn.

2) Die Größe der Kraft, welche im Punkte B angebracht werden muß, um ihr das Gleichgewicht zu halten, wird durch

$$Q = \frac{P \times CA}{CB}$$

ausgedrückt seyn.

Wenn endlich die beyden Gewichte P, Q und die Länge AB des Hebels gegeben sind, so findet man den Unterstützungspunkt C, um welchen diese Gewichte im Gleichgewichte sind, wenn man den Hebel AB in zwey Theile zerlegt, die sich umgekehrt wie die Gewichte verhalten.

Dritte Anmerkung.

§. 132.

Wenn mehrere Kräfte an einem und demselben Hebel angebracht sind, so braucht man bloß ihre Richtungen und die Lage des Unterstützungspunktes zu kennen, um die Verhältnisse zu bestimmen, welche sie für den Fall des Gleichgewichts zu einander haben müssen. Da aber mehrere um einen und denselben Unterstützungspunkt wirkende Kräfte nicht im Gleichgewichte seyn können, wenn nicht die Zusammengesetzte aller dieser Kräfte vom Wiederstande dieses Punktes aufgehoben wird: so ist klar, daß die Bedingungen des Gleichgewichts in beyden folgenden bestehen: 1) daß alle Kräfte eine einzige Zusammengesetzte haben müssen; 2) daß die Richtung dieser Zusammengesetzten durch den Unterstützungspunkt gehen muß.

Zusatz.

§. 133.

Wenn die Richtungen aller Kräfte in einerley Ebne liegen, so werden diese Kräfte nothwendigerweise eine Zusammengesetzte haben (§. 42.), und die erste Bedingung ist erfüllt; es ist also zum Gleichgewichte nur noch erforderlich, daß die Richtung dieser Zusammengesetzten durch den Unterstützungspunkt gehe, oder, welches auf eins hinauskommt, daß die Summe der Momente der Kräfte, welche den Hebel nach der einen Seite des Unterstützungspunktes zu bewegen streben, der Summe der Momente der Kräfte gleich sey, welche ihn nach der entgegengesetzten Seite zu drehen streben.

Vierte Anmerkung.

§. 134.

Bisher haben wir das Gewicht des Hebels außer Acht gelassen; will man indessen auch dieses in Betrachtung ziehen, so muß es als eine neue im Schwerpunkte des Hebels nach einer vertikalen Richtung angebrachte Kraft angesehen werden, und für den Fall des Gleichgewichts werden alle Bedingungen, von denen wir eben geredet haben, zwischen allen Kräften statt finden, wenn man die des Hebels mit darin begreift.

Es seyen also P, Q Fig. 57. zwey am schweren Hebel AB aufgehängte Gewichte, welche um den Unterstützungspunkt C im Gleichgewichte sind; betrachtet man nun das Gewicht des Hebels als ein drittes im Schwerpunkte G des Hebels aufgehängtes Gewicht S, so wird die Summe der Momente der beyden Gewichte Q, S in Rücksicht auf den Unterstützungspunkt C, dem Momente des Gewichts P gleich seyn, das heißt, man wird haben

$$Q \times CB + S \times CG = P \times CA;$$

oder, wenn man von diesen beyden gleichen Größen das Moment des Hebels S × CG abzieht,

$$Q \times CB = P \times CA - S \times CG.$$

Wenn man also die Länge und das Gewicht des Hebels, die Lage seines Schwerpunktes, die des Unterstützungspunktes, und eins der beyden Gewichte P, Q kennt, so wird es immer möglich seyn, das andre Gewicht zu erhalten; denn man wird haben.

$$P = \frac{Q \times CB + S \times GG}{CA}$$

und $$Q = \frac{P \times CA - S \times CG}{CB}.$$

Was die Belastung der Unterlage anbelangt, so ist klar, daß sie der Summe der Gewichte $P + Q + S$ gleich ist.

§. 135.

Wenn aber das am schweren Hebel AB aufgehängte Gewicht P Fig. 58. um den Unterstützungspunkt C vermittelst einer Kraft Q im Gleichgewichte erhalten wird, deren Richtung vertikal ist, und welche von unten nach oben wirkt, so wird das Moment der Kraft Q, welche den Hebel nach der einen Seite zu bewegen strebt, gleich seyn, der Summe der Momente der Gewichte P, S, welche ihn nach der entgegen gesetzten Seite zu bewegen streben, und man wird haben

$$Q \times CB = P \times CA + S \times CG,$$

oder, wenn das Moment des Hebels abgezogen wird,

$$Q \times CB - S \times CG = P \times CA.$$

Die Größen, welche die beyden Kräfte P, Q haben müssen, um einander das Gleichgewicht zu halten, werden also seyn

$$P = \frac{Q \times CB - S \times CG}{CA}$$

und $$Q = \frac{P \times CA + S \times CG}{CB},$$

und die Belastung des Unterstützungspunktes ist

$$P + S - Q.$$

Zusatz.

§. 136.

Man sieht hieraus, daß wenn das Gewicht P als eine Last betrachtet wir, und Q als eine Kraft welche ihr das Gleichgewicht halten, oder welche diese Last vermittelst des Hebels AB überwinden soll, das Gewicht dieses Hebels eine Kraft ist, welche die der Kraft Q befördert oder verhindert, je nachdem dieses Gewicht den Hebel mit der Kraft nach einerley oder nach der entgegengesetzten Seite zu bewegen strebt. So zum Beyspiel ist in Fig. 57. das Gewicht des Hebels der Kraft Q beförderlich, und verlängert man den Arm des Hebels CB dieser Kraft, so würde man sie in den Stand setzen, einer weit größern Last das Gleichgewicht zu halten, welches von zweyen Ursachen herrührt, 1) weil man hierdurch ihr Moment vergrößern würde; 2) weil man das Gewicht S des Hebels vergrößern würde, welches allein schon hinreichend wäre, einem größern Theil der Last das Gleichgewicht zu halten. Dahingegen wird im Falle der Fig. 58. das Gewicht des Hebels der Kraft Q entgegen wirken, und man kann die Länge des Hebelarms CB nicht verlängern, ohne zugleich sein Gewicht S zu vergrößern, welches einen Theil der Last ausmacht; wenn also in diesem Falle die Verlängerung des Hebelarms einigen Vortheil gewähren soll, so muß das Moment dieser Verlängerung kleiner seyn als die Zunahme, die hieraus in dem Momente der Kraft erfolgt.

Lehrsatz.

§. 137.

Wenn zwey an einen Hebel AB Fig. 59. angebrachte Kräfte P, Q um den Unterstützungspunkt C im Gleichgewichte sind, so verhalten sie sich zu einander umgekehrt wie die Räume, welche diese Kräfte nach ihren Richtungen durchlaufen würden, wenn das Gleichgewicht um unendlich wenig gehoben würde.

Beweis.

Vom Unterstützungspunkt C seyen auf die Richtungen der Kräfte die senkrechten CE, CF gefällt, und statt des geradlinigten Hebels AB wollen wir den gebrochenen Hebel ECF betrachten, an dessen äußern Punkten E, F wir uns die Kräfte P, Q angebracht denken wollen; wir wollen ferner annehmen, daß vermöge einer Aufhebung des Gleichgewichts, der Winkelhebel ECF die unendlich nahe gelegene Lage eCf annimmt. Dieses vorausgesetzt, werden die kleinen Bogen Ee, Ff die Räume seyn, welche die Kräfte P, Q vermöge dieser Aufhebung durchlaufen; da nun der Winkel ECF des Winkelhebels unveränderlich ist, so werden die beyden Winkel ECe, FCf gleich seyn, und man wird haben

$$CF : CE = Ff : Ee;$$

nun hat man wegen des Gleichgewichts (§. 35.)

$$P : Q = CF : CE;$$

man hat also auch

$$P : Q = Ef : Ee.$$

Wir werden in der Folge Gelegenheit haben zu zei-

gen, daß sich die Richtigkeit dieses Satzes für alle Fälle des Gleichgewichts bey allen Maschienen beweisen läßt.

Von den Rollen und den Flaschenzügen.

§. 138.

Eine Scheibe GIHK, Fig. 60. 61., welche in ihrem Umfange einen Einschnitt hat, um ein Seil PGKHQ herum legen zu können, und durch deren Mittelpunkt eine Axe (ein Polzen) E geführt ist, um welche sie sich innerhalb des Klobens EL drehen kann, wird eine Rolle genannt.

§. 139.

Wir wollen annehmen, daß die Axe der Rolle fest sey, daß zwey Kräfte P, Q an den äußersten Punkten des Seils angebracht sind, und daß dieses Seil, welches vollkommen biegsam ist, auf den Einschnitt der Rolle keine Reibung verursacht, so daß es in diesem Einschnitte frey weggleiten kann. Die Figur der Rolle mag seyn, welche sie wolle, das heißt der vom Seile gebildete Bogen GHK mag kreisförmig seyn oder nicht, so ist klar, daß die beyden Kräfte P, Q einander nicht das Gleichgewicht halten können, wenn sie nicht gleich sind; denn wenn sie ungleich wären, so würde die größere Kraft die kleinere hinüberziehen, indem sie das Seil in dem Einschnitte der Rolle hinweggleiten ließe.

Da ferner unter eben dieser Annahme die Rolle keinen andern befestigten Punkt als den Mittelpunkt hat, so ist ferner klar, daß sie, wenn sie von den beyden Kräf-

ten P, Q gezogen wird, nicht in Ruhe bleiben kann, wofern nicht die Zusammengesetzte dieser beyden Kräfte nach dem Mittelpunkte gerichtet ist, und vom Widerstande dieses Punktes aufgehoben wird. Verlängert man also die Richtungen PG, QH der beyden Seile bis sie in einem Punkte A zusammen stoßen, und nimmt man auf diesen Richtungen die gleichen Theile AB, AC, um die Kräfte P, Q darzustellen, so wird, wenn man das Parallelogramm ABDC vollendet, die Diagonale AD, welche die Zusammengesetzte dieser beyden Kräfte darstellt, durch den festen Punkt E gehen.

Wenn nun die Figur der Rolle ein Kreis ist, so wird diese letztere Bedingung immer erfüllt; denn da das Dreyeck ABD gleichschenklicht ist, so ist der Winkel PAD dem Winkel BDA, und folglich dem Winkel DAC gleich; mithin theilt die Diagonale den Winkel BAC in zwey gleiche Theile. Zieht man nun die Gerade EA, so wird auch diese eben denselben Winkel in zwey gleiche Theile theilen; denn wenn man vom Mittelpunkte E nach den Berührungspunkten der Seile die Halbmesser EG, EH zieht, welche auf den Richtungen der Seile senkrecht sind, so werden die rechtwinklichten Dreyecke EGA, EHA einander völlig gleich seyn, und der Winkel EAG des einen wird dem Winkel EAH des andern gleich seyn. Mithin haben die Gerade EA, und die Diagonale DA einerley Richtung.

Wenn also der Mittelpunkt einer Rolle befestigt, und deren Figur kreisförmig ist, so ist zum Gleichgewichte der beyden Kräfte P, Q nur erforderlich, daß sie

einander gleich seyen, und daß zugleich die Rolle um ihre Axe in Ruhe bleibe.

Die Last, welche die Axe der Rolle zu tragen hat, ist offenbar der aus den beyden Kräften P, Q zusammengesetzten gleich; bezeichnet man also diese Last durch R, so wird man haben (§. 36.)

$$P : Q : R = AB : AC : AD.$$

Endlich sey die Sehne GH des vom Seile gebildeten Bogens geführt, so werden die Dreyecke GHE, ABD ähnlich seyn, weil ihre Seiten auf einander senkrecht sind, und man wird haben

$$AB : AC : AD = GE : EH : GH;$$

mithin

$$P : Q : R = GE : EH : GH.$$

§. 140.

Wenn die Axe der Rolle nicht durchaus befestigt ist, sondern nur vermittelst des Klobens EL und des Seils LS von der Kraft S zurückgehalten wird, so darf nur, damit diese Axe in Ruhe bleibe, und die drey Kräfte P, Q, S im Gleichgewichte seyen, die Kraft S der Last, welche die Axe zu tragen hat, gleich und gerade entgegen gesetzt seyn. Es muß also 1) die Richtung dieser Kraft mit der Geraden EA zusammen fallen; 2) muß ihre Größe der aus den beyden Kräften P, Q erfolgenden Zusammengesetzten R gleich seyn, und man wird haben

$$P : Q : S = GE : EH : GH.$$

Wenn also zwey an einem um eine Rolle gelegten Seile angebrachte Kräfte P, Q im Gleichgewichte sind, und einer dritten an der Axe der

Rolle angebrachten Kraft S das Gleichgewicht halten, so sind 1) die beyden Kräfte P, Q einander gleich; 2) theilt die Richtung der Kraft S den von den beyden andern Richtungen gebildeten Winkel in zwey gleiche Theile; 3) verhält sich jede der Kräfte P, Q zur dritten S, wie sich der Halbmesser der Rolle zu der Sehne des vom Seile gebildeten Bogens verhält.

Erster Zusatz.

§. 141.

Man sieht also hieraus, daß wenn das Seil des Klobens, anstatt von einer Kraft S gezogen zu werden, an einem festen Punkte von einem unbegränzten Wiederstande Fig. 60. angebracht ist, und man durch Anwendung der Rolle bloß bewerkstelligen will, die beyden Kräfte P, Q ins Gleichgewicht zu setzen, oder vermittelst einer Kraft Q, die der Last P aufzuheben, die Rolle der Kraft in nichts günstig seyn wird; sie wird keinen andern Effekt haben als die Richtung dieser Kraft mit Beybehaltung ihrer Größe zu ändern.

Wenn aber einer der äußern Punkte des um die Rolle gelegten Seils an einem festen Punkte P Fig. 61. befestigt ist, und man will vermittelst der Rolle eine Kraft Q mit einer andern am Kloben angebrachten Kraft S ins Gleichgewicht setzen, so würde die Rolle dieser Kraft vortheilhaft seyn, welche immer kleiner als die Last ist; denn man hat

$$Q : S = EH : GH.$$

Zweyter Zusatz.

§. 142.

Wenn die Richtungen der Theile PG, QH des Seils einander, und folglich der Richtung des am Kloben angebrachten Seils parallel sind, so wird die Sehne GH in den Durchmesser übergehen, und folglich der doppelte Halbmesser seyn; die proportionale Reihe des §. 139. wird also seyn

$$P : Q : S = 1 : 1 : 2;$$

das heißt die Kraft S oder die Belastung der Axe der Rolle ist gleich der Summe der beyden Kräfte P, Q, oder dem Doppelten von einer derselben. Auf diese Art wird im Falle der Fig. 63. die Kraft Q vermittelst der Rolle und des Befestigungspunktes P, der Last S das Gleichgewicht halten, wenn sie auch nur die Hälfte dieser letztern ist.

§. 143.

Wenn der Kloben an einem befestigten Punkte, und die Kraft sowohl als die Last an dem die Rolle umgebenden Seil angebracht sind, so heißt sie eine feste Rolle; wenn aber die Last am Kloben angebracht ist, und die Rolle sich mit derselben bewegen muß, so heißt sie eine Zugrolle. Dergleichen stellen Fig. 61, 63. dar.

Dieses vorausgesetzt, sey Fig. 64. irgend eine Anzahl beweglicher Rollen, welche man als ohne Schwere betrachtet. Die erste trage eine an ihrem Kloben angebrachte Last P, und sey von einem Seile umgeben, von welchem ein Ende an dem befestigten Punkt D und das andre am Kloben der zweyten Rolle befestigt ist;

diese sey ebenfalls von einem Seile umgeben, von welchem ein Ende im Punkte H, und das andre am Kloben der folgenden Rolle befestigt ist; um diese dritte Rolle sey ein drittes Seil gelegt, welches einerseits im Punkte M befestigt ist, und dessen zweytes Ende von einer Kraft Q gezogen wird, und so fort, wenn die Anzahl der Rollen größer ist. Nimmt man nun an, daß das ganze System im Gleichgewicht sey, und zieht sowohl die Halbmesser als die Sehnen der Rollen, wie in der Figur zu sehen ist: so kann man zuvörderst das Gleichgewicht der ersten Rolle A so betrachten, als wäre sie nur allein, und bezeichnet man die Spannung des Seils BX durch X, so wird man haben (§. 141.)

$$P : X = BC : BA.$$

Aus eben dem Grunde hat man, wenn die Spannung des Seils FY durch Y bezeichnet wird

$$X : Y = FG : EF.$$

Desgleichen wird man für die dritte Rolle haben

$$Y : Q = KL : IK,$$

und so fort, die Anzahl der Rollen mag seyn welche sie wolle. Multiplicirt man also alle diese Proportionen, so wird man haben

$$P : Q = BC \times FG \times KL : BA \times EF \times IK,$$

das heißt, die Last verhält sich zur Kraft, wie sich das Produkt der Sehnen zum Produkte der Halbmesser verhält.

Zusatz.

§. 144.

Wenn alle Seile CD, GH, LM ꝛc. Fig. 65. parallel

sind, so werden die Sehnen in die Durchmesser überge-
hen, und die vorhergehende Proportion wird alsdann

$$P : Q = 2 \times 2 \times 2 : 1 \times 1 \times 1, \text{ oder } = 8 : 1$$

woraus man sieht, daß sich alsdann die Last zur Kraft verhält, wie die Zahl 2 auf einer Potenz erhoben, die die Anzahl der Zugrollen angiebt, sich zur Einheit verhält.

Wenn man also die Anzahl der Zugrollen auf eine angemessene Art vermehrt, so kann man eine mittelmäßige Kraft in den Stand setzen, einer sehr großen Last das Gleichgewicht zu halten. So kann zum Beyspiel vermittelst dreyer Rollen und dreyer Befestigungspunkte D, H, M die Kraft einer acht Mahl größern Last das Gleichgewicht halten.

So vortheilhaft diese Anordnung der Zugrollen scheinen könnte, so wendet man sie doch selten an, weil, wenn die erste Rolle einen gewissen Raum A durchläuft, die zweyte einen doppelt so großen, die dritte einen vierfachen .... und so fort durchlaufen muß, welches einen sehr großen Raum erfordert; man bedient sich daher weit häufiger der Flaschenzüge.

§. 145.

Ein System verschiedener in einerley Kloben zusammengesetzten Rollen wird ein Flaschenzug genannt; die Rollen mögen übrigens besondre Axen wie in Fig. 66, 67, oder nur einerley Axe haben, wie in Fig. 68. Man bringt immer eine feste Rolle und eine Zugrolle zugleich an, Fig. 66, 67, 68, und alle Rollen beyder Flaschenzüge sind von einem und demselben Seil umwunden, von

welchem

welchem ein Ende an einem der beyden Flaschenzüge befestigt ist, und dessen anderes Ende von der Kraft gezogen wird; endlich ist die Last am Kloben des beweglichen Flaschenzugs befestigt.

Man kann den Rollen verschiedene Durchmesser geben, und sie dergestalt anordnen, daß alle Theile des Seils, welche von einem Flaschenzuge zum andern gehen, einander parallel seyen, wie im Fig. 66, 67; allein diese Anordnung vergrößert die Ausdehnung der Flaschenzüge, und man kann sie auf ein kleineres und bequemeres Volumen zurückbringen, wenn man in jedem derselben alle Rollen um eine und dieselbe Axe zieht, wie in Fig. 68. Hierdurch werden die von einerley Seite der Flaschenzüge befindlichen Seile nicht den von der andern Seite liegenden parallel seyn; wenn aber der Abstand der Flaschenzüge nur einigermaßen beträchtlich ist, so ist der Fehler in Ansehung des Parallelismus sehr klein, und man kann ihn als unmerklich betrachten.

§. 146.

Betrachtet man nun die Seile der Flaschenzüge als einander parallel, und läßt man das Gewicht der ganzen Maschiene außer Acht, so kann, wenn Q eine der am Kloben des beweglichen Flaschenzugs aufgehängten Last P das Gleichgewicht haltende Kraft ist, das Gleichgewicht an der ganzen Maschiene nicht statt haben, wofern es nicht bey jedem Flaschenzuge insbesondre anzutreffen ist, und wofern nicht die beyden Theile des diese Rolle umgebenden Seils, gleiche Spannung haben (§. 140.). Die Spannungen der beyden Seile QA, BC

sind also einander gleich; dasselbe findet auch bey den der Seile BC, DE, bey den der Seile DE, FG, und so fort statt, die Anzahl der Seile sey welche sie wolle. Es haben daher alle Seile, welche von einem Flaschenzuge zum andern gehen, gleiche Spannung. Nun hält die Summe dieser Spannungen der Last P das Gleichgewicht und ist ihr gleich; oder welches auf eins hinaus kommt, die Spannung eines dieser Seile multiplicirt durch ihre Anzahl ist der Kraft gleich; die Spannung eines dieser Seile oder die Kraft Q ist also der Quotient aus der Last P, dividirt durch die Anzahl der von einem Flaschenzuge zum andern geführten Seile.

Man sieht also, daß in dem Falle der Fig. 66, wo der äußere Punkt des Seils an dem befestigten Flaschenzuge angebracht ist, die Kraft Q der sechste Theil der Last seyn muß, welcher sie das Gleichgewicht halten soll, und daß in dem Falle der Fig. 67, wo der äußere Punkt des Seils am beweglichen Flaschenzuge befestigt ist, sie der fünfte Theil derselben seyn muß, weil dann eine Rolle und ein Seil weniger ist.

Wollte man auch das Gewicht des Flaschenzuges selbst mit in Erwägung ziehen, so müßte man es als einen Theil der Last ansehen.

Vom Wellrade.

§. 147.

Das Wellrad, die Winde oder das **Rad an der Welle**, Fig. 69, besteht aus einem um seine Axe beweglichen Cylinder (einer Welle), und aus einem Seile,

welches mit einem seiner Enden um die Welle gewunden wird, während daß eine Kraft Q sie umdreht, welches bewirkt, daß eine am andern Ende befestigte Last P mit gezogen wird. An beyden Enden der Welle gehen zwey schwächere Cylinder (die Zapfen) A, B aus, welche auf Unterlagen (in Pfannen) gelegt werden können, wodurch sie sich desto freyer um ihre Axe drehen kann.

§. 148.

Es giebt verschiedene Arten an dieser Maschiene eine Kraft anzubringen, um der Welle die Umdrehungsbewegung zu geben.

1) Kann man mit der Welle auf derselben Axe eine Scheibe anbringen, deren Umkreis einen Einschnitt hat, wie beym Flaschenzuge, und von einem zweyten Seil umwunden ist. Dieses Seil, welches von der Kraft gezogen wird, setzt die Rolle nebst der Welle um ihre gemeinschaftliche Axe in Bewegung. Diese erste Anordnung, auf welche wir alle zurückführen werden, wird selten angewandt, weil hierzu erforderlich ist, daß das Seil der Rolle sehr lang sey, wenn der Raum, den die Last durchlaufen soll, ein wenig beträchtlich ist.

2) Kann man die Felgen des Rades mit hölzernen Zapfen (Spillen) versehen, welche in gleicher Entfernung von einander angebracht sind, und an denen die Menschen vermittelst ihrer Hände wirken, wodurch ihnen ein Theil ihres Gewichts behülflich ist, die Maschiene in Bewegung zu setzen.

3) Unter vielen Umständen bringt man an der Welle statt einer Rolle eine an ihrem Umfange vertiefte Trom-

mel an, in welcher Menschen oder Thiere gehen können; und alsdann bewegen sie vermittelst ihres Gewichts die Trommel und die Welle.

4) Zuweilen läßt man durch die Welle, anstatt sich der Rolle oder der Trommel zu bedienen, Hebebäume (Speichen) durchgehen, welche auf der Axe der Welle senkrecht sind, und an deren äußern Enden die Menschen vermöge ihrer Muskelkraft und durch einen Theil ihres Gewichts wirken.

5) Endlich begnügt man sich oft, besonders, wenn die Last nicht sehr groß ist, an beyden äußern Enden der Welle eine oder zwey Kurbeln anzubringen, welche die Menschen vermittelst der Kraft ihrer Arme in Bewegung setzen.

§. 149.

Die Benennungen dieser Maschiene sind nach ihrem Gegenstande, und selbst nach ihrer Lage, verschieden. Gewöhnlich nennt man sie eine liegende **Winde** oder ein Haspel, wenn die Welle horizontal ist, und man nennt sie eine stehende **Winde**, ein Göpel, wenn die Welle vertikal ist, da man sich dann, um ihr die Bewegung beyzubringen, horizontaler Speichen bedient.

Es ist klar, daß die verschiedenen Arten, nach denen die Kräfte an der Welle der Winde angebracht werden können, in Ansehung der Theorie auf die zuerst beschriebene zurück kommen; denn die Richtung der Kraft mag seyn, welche sie wolle, so kann man, wenn diese Richtung in einer auf der Axe der Welle senkrechten Ebne liegt, sich dieselbe immer an einem Rade angebracht den-

ken, dessen Umkreis die Richtung dieser Kraft berühren würde. Nehmen wir also UXYZ für die Welle der Winde, deren Axe BA auf der Ebne des Rades hDk senkrecht ist, so sey: 1) die am Umkreise dieses Rades in irgend einer Richtung DQ angebrachte Kraft Q in der Ebne des Rades, und berühre ihren Umkreis in irgend einem Punkte D; 2) die Richtung KP der Last berühre die Oberfläche der Welle in K, und liege in einer der Ebne des Rades parallelen Ebne. Endlich wollen wir annehmen, daß die Axe AB der Welle horizontal, und folglich die Richtung KP der Kraft vertikal sey. Dieses vorausgesetzt, stellen sich zwey Aufgaben aufzulösen dar, die erste ist für den Fall des Gleichgewichts an dieser Maschiene, daß Verhältniß der Kraft Q zur Last P zu finden; die zweyte ist den Druck zu finden, welchen die Unterlagen der beyden Zapfen AB erleiden.

§. 150.

Um die erste dieser Aufgaben aufzulösen, wollen wir uns durch die Axe der Welle eine horizontale Ebne KMEN gelegt denken; so wird diese Ebne durch den Punkt K gehen, in welchem die Richtung der Last die Oberfläche der Welle berührt; ferner wird sie die Ebne des Rades in einer durch den Mittelpunkt C gehenden horizontalen Linie ME, und die Richtung der Kraft Q in einem Punkte E schneiden. Es sey nun die Gerade ME in ES verlängert, und durch den Punkt E die vertikale ER geführt; da nun die drey Geraden EQ, ER, FS in einerley, nehmlich in der Ebne des Rades liegen, so wird man die Kraft Q in zwey Kräfte R, S zerlegen

können, welche nach EG, EH wirken. In dieser Hinsicht stelle man diese Kraft durch den Theil EF ihrer Richtung vor, und vollendet man das Parallelogramm EGFH, so wird man haben

$$Q : S = EF : EH,$$
$$Q : R = EF : EG \text{ oder } FH;$$

nun sind, wenn man den Halbmesser CD zieht, die beyden rechtwinklichten Dreyecke CDE, EHF einander ähnlich und geben

$$EF : FH : EH = CE : CD : DE,$$

man wird also haben

$$Q : S = CE : DE$$
$$Q : R = CE : CD;$$

man kann also statt der Kraft Q die beyden Kräfte R, S nehmen, deren Werthe

$$R = \frac{Q \times CD}{CE}$$

$$S = \frac{Q \times DE}{CE}$$

bekannt seyn werden, weil im Dreyecke CDE alles bekannt ist, wenn die Richtung der Kraft Q gegeben ist.

Nun wirkt von den beyden Kräften R, S, die letztere gegen die Axe der Welle, welche unbeweglich ist, und kann daher als unmittelbar im Punkte C angebracht und vom Wiederstande der Axe aufgehoben, betrachtet werden; diese Kraft kann also in keiner Art zur Umdrehungsbewegung der Welle etwas beytragen, und sie hat keinen andern Effekt als die Zapfen an ihre Pfannen zu drücken. Es bleibt also nur noch die Kraft

R übrig, welche der Last P das Gleichgewicht zu halten angewandt werden kann.

Nun sey in der horizontalen Ebne KMEN der Halbmesser der Welle KI gezogen, welcher auf der Axe senkrecht, und der ME parallel seyn wird; es sey ferner die Gerade KE gezogen, welche die Axe in einem Punkte L schneiden wird. Dieses vorausgesetzt, kann der befestigte Punkt L als unbeweglich, und die Gerade KE als eine unbiegsame, vom Punkte L zurückgehaltene Gerade angesehen werden, an deren äußern Enden die Kräfte R, P angebracht sind; nun sind die Richtungen dieser beyden Kräfte vertikal, und folglich parallel; mithin ist zu ihrem Gleichgewichte erforderlich, daß sie ihren Hebelsarmen LE, LK umgekehrt proportional seyen, oder daß man habe

$$R : P = KL : LE.$$

Aber die ähnlichen rechtwinklichten Dreyecke KIL, LCE geben

$$KL : LE = KI : CE,$$

man wird also haben

$$R : P = KI : CE;$$

multiplicirt man diese Proportion und die oben gefundene

$$Q : R = CE : CD$$

nach der Ordnung, so wird man für den Fall des Gleichgewichts haben

$$Q : P = KI : CD;$$

das heißt: die Kraft wird sich zur Last verhalten, wie der Halbmesser der Welle zum Halbmesser des Rades, welches mit der ersten Aufgabe übereinstimmt.

Setzt man die Produkte der äußern und mittlern Glieder einander gleich, so hat man

$$Q \times CD = P \times KI;$$

woraus man sieht, daß im Falle des Gleichgewichts die Momente der Kraft und der Last, beyde nach der Axe der Welle genommen, einander gleich sind.

§. 151.

Was die Pressungen anbelangt, welche die Zapfen auf ihre Unterlagen ausüben, so ist klar, daß sie nur der Effekt der Kräfte P, Q und des Gewichts T der Maschiene seyn können, welches letztere man sich im Schwerpunkte g derselben angebracht denken kann; oder wenn man statt der Kraft Q immer die beyden Kräfte R, S nimmt, so werden diese Pressungen von den vier Kräften P, R, S, T hervorgebracht werden.

Diese Kräfte sind alle bekannt; denn 1) ist die Last P und das Gewicht T der Maschiene unmittelbar gegeben; 2) die beyden andern Kräfte, für deren allgemeine Werthe wir eben gefunden haben

$$R = \frac{Q \times CD}{CE}$$

$$S = \frac{Q \times DE}{CE}$$

werden im Falle des Gleichgewichts, worin man $Q \times CD = P \times KI$ hat

$$R = \frac{P \times KI}{CE}$$

$$S = \frac{P \times KI \times DE}{CD \times CE}$$

und enthalten nur völlig bekannte Größen, weil im rechtwinklichten Dreyecke GDE alles bekannt ist, sobald die Richtung der Kraft Q gegeben ist.

Ferner werden die beyden Kräfte P, R, deren Richtungen vertikal, und welche um den Punkt L im Gleichgewichte sind, auf den Punkt der Axe einen Druck ausüben, dessen Richtung vertikal, und welcher ihrer Summe P + R gleich ist. Wenn nun diese Last P + R in die Unterstützungspunkte A und B übergetragen wird, so muß sie als die Zusammengesetzte zweyer Pressungen angesehen werden, welche sie auf diese Punkte ausübt, und man findet jede dieser Pressungen, wenn man die Zusammengesetzte P + R in zwey Theile theilt, welche den Entfernungen des Punktes L von beyden Unterstützungspunkten umgekehrt proportional sind. Es seyen also X die Pressung, welche hierdurch im Punkte A entsteht, X′ die, welche hieraus im Punkte B erfolgt, so wird man diese beyden Pressungen durch folgende Proportionen finden

$$AB : BL = P + R : X$$
$$AB : AL = P + R : X'.$$

Desgleichen kann das Gewicht T der ganzen Maschiene, welches man sich im Schwerpunkte g vereinigt denken muß, als die Zusammengesetzte der vertikalen Pressungen angesehen werden, welche sie auf beyde Unterstützungspunkte hervorbringt; und man findet diese Pressungen, wenn man das Gewicht T in zwey Theile zerlegt, welche den Entfernungen Ag, gB umgekehrt proportional sind.

Es seyen also Y und Y′ die Pressungen, welche hier-

aus respektiv in den Punkten A und B erfolgen, so findet man diese Pressungen durch folgende zwey Proportionen:

$$AB : Bg = T : Y$$
$$AB : Ag = T : Y'.$$

Endlich übt die im Punkte C der Axe angebrachte horizontale Kraft S, auf die beyden Unterstützungspunkte horizontale auf der Axe AB senkrechte Pressungen aus, wenn man die Kraft S in zwey Theile zerlegt, welche sich umgekehrt wie die Geraden AC, CB verhalten. Es seyen also Z, Z′ die auf die Punkte A, B respektiv bewirkten horizontalen Pressungen, so findet man diese Pressungen durch die beyden Proportionen

$$AB : BC = S : Z$$
$$AB : AC = S : Z'.$$

Der Unterstützungspunkt A leidet also die beyden vertikalen Pressungen X, Y, und die horizontale Pressung Z, welche nach der Richtung der Kraft S wirkt; desgleichen leidet der Unterstützungspunkt B die beyden vertikalen Pressungen X′, Y′ und die horizontale Pressung Z′. Setzt man also bey jedem dieser Punkte die darauf wirkenden Kräfte zusammen, so findet man die Größe und die Richtung ihrer Zusammengesetzten, und man wird hierdurch die Größe des Wiederstandes haben, deren er fähig ist, desgleichen die Richtung, nach welcher er wiederstehen muß, um nicht der vereinigten Gewalt der Last P, der Kraft Q und des Gewichts T der Maschiene auszuweichen. Dieses ist der Gegenstand der zweyten Aufgabe.

§. 152.

Bis jetzt haben wir die Seile als unendlich dünne Faden betrachtet; wenn indessen das Gewicht P am Seile KP aufgehängt ist, so fällt die Richtungslinie dieses Gewichts mit der Axe des Seils zusammen; und in dem Falle, wo das Seil, indem es sich um die Welle windet, seine Figur beybehält, so wird dessen Axe immer von der Oberfläche der Welle um eine dem Halbmesser des Seils gleiche Größe abstehen. In diesem Falle verhält es sich wegen der Dicke des Seils eben so als wenn das Seil unendlich dünne wäre, und sich um eine Welle wände, deren Halbmesser den der Maschiene um eine dem Halbmesser des Seils gleiche Größe übertrift. Eben so verhält es sich mit dem Seile an dem Rade, welches wegen seiner Dicke als eine mathematische Linie betrachtet werden muß, die um ein Rad gewunden ist, dessen Halbmesser den des Rades der Maschiene, um eine dem Halbmesser dieses Seils gleiche Größe übertrift. In allen den Verhältnissen, welche wir eben gefunden haben, muß man also den Halbmesser der Welle und den des Rades um die den Halbmessern der um sie gewundenen Seile respektiv gleichen Größen vermehren. Zum Beyspiel beym Falle des Gewichts an der Welle wird sich die Kraft Q zur Last P verhalten, wie der Halbmesser der Welle um den Halbmesser des Seils KP vermehrt, sich zum Halbmesser des Rades vermehrt um den Halbmesser des Seils DQ verhält.

§. 153.

Wenn mehrere Rollen Fig. 70. dergestalt mit ein=

ander verbunden sind, daß während das Seil BQ des ersten Rades von einer Kraft Q gezogen wird, das Seil CE der Welle dieses Rades, anstatt an der Last unmittelbar angebracht zu seyn, um die Rolle des zweyten gewunden wird: daß ferner das Seil FH der Welle des zweyten Rades, um die Scheibe der dritten gewunden wird: endlich, daß das Seil IP der Welle des letzteren Rades an der Last P angebracht sey, so können Kraft und Last nicht im Gleichgewichte seyn, wofern nicht zwischen den beyden Kräften, welche auf jedes Rad insbesondre wirken, ein Gleichgewicht anzutreffen ist. Bezeichnet man also die Spannung des Seils CE durch K, und durch L die des Seils FH, so wird man für den Fall des allgemeinen Gleichgewichts haben

1) wegen des Gleichgewichts an dem ersten Rade (§. 158.)

$$Q : K = CA : AB;$$

2) wegen des Gleichgewichts des zweyten Rades

$$K : L = DF : DE;$$

3) wegen des Gleichgewichts des dritten Rades

$$L : P = GI : GH$$

und so fort, die Anzahl der Räder mag seyn welche sie wolle. Multiplicirt man alle diese Proportionen nach der Ordnung, so hat man

$$Q : P = CA \times DF \times GI : AB \times DE \times GH.$$

Das heißt: die Kraft verhält sich zur Last, wie sich das Produkt der Halbmesser der Wellen zum Produkte der Halbmesser der Räder verhält.

Wenn zum Beyspiel der Halbmesser des Rades einer jeden Rolle das Vierfache von dem seiner Welle wä-

te, so würde man für den Fall des Gleichgewichts zwischen dreyen Rädern haben

$$Q : P = 1 \times 1 \times 1 : 4 \times 4 \times 4 \text{ oder } = 1 : 64.$$

Man sieht also, daß wenn man auf diese Art die Anzahl der Räder vervielfältigt, hierdurch mittelmäßige Kräfte in den Stand setzen kann, einer sehr großen Last das Gleichgewicht zu halten; man bringt indessen diese Anordnung niemals an, weil sie sehr große Längen der Seile um die ersten Räder nöthig macht, wenn der Raum, welchen die Last durchlaufen soll, ein wenig beträchtlich ist.

§. 154.

Wenn man von dieser Anordnung Nutzen ziehen will, so lasse man 1) die Seile hinweg, welche die Bewegung von einem Rade aufs andre übertragen; 2) versehe man Fig. 71. den Umfang eines jeden Rades mit Zähnen, welche in gleicher Entfernung von einander liegen, welches dann ein Sternrad heißt; 3) befestige man an der Welle eines jeden Rades ein eben dergleichen verzahntes Rad von einem kleinern Halbmesser, welches dann das Getriebe heißt; 4) endlich ordne man das ganze System so an, daß die Zähne eines jeden Getriebes in die Zähne des folgenden Rades eingreifen. Auf diese Art kann sich ein Rad nicht um seine Axe bewegen, wofern nicht sein Getriebe das Rad, in welches es eingreift, mitzieht, und hierdurch um seine Axe zu drehen nöthigt; und die Anzahl der Umdrehungen, welche jedes Getriebe in der folgenden Rolle hervorbringen kann, ist unbegränzt. Es verhält sich also hiermit eben so als

wenn dieses Getriebe die Welle eines Rades, und das Rad, in welches es eingreift, wie im vorhergehenden Falle von einem Seile umwunden wäre.

Wenn also eine am Umkreise des ersten Rades angebrachte Kraft Q, mit einer am Umkreise des letzten Getriebes angebrachten Last P im Gleichgewichte ist, so verhält sich die Kraft zur Last, wie das Produkt der Halbmesser der Getriebe zum Produkte der Halbmesser der Räder.

§. 155.

Die Sternräder werden bei einer großen Anzahl Maschienen, und vorzüglich in den Mühlen und den Uhrwerken angewandt. Ihr vorzüglichster Gegenstand ist, einem Cylinder oder einer Welle vermittelst der Umdrehungsbewegung einer andern Welle, eine Umdrehungsbewegung beyzubringen. In dieser Hinsicht ist es nicht nothwendig, daß die Axen parallel seyen, wie wir immer vorausgesetzt haben, sondern es genügt schon, wenn sie in einerley Ebne liegen.

§. 156.

Wenn die Axen beyder Wellen einen rechten Winkel bilden, so setzt man gewöhnlich die Zähne auf die Ebne der Rolle senkrecht, wie in Fig. 72, und nennt es dann ein Kammrad, Kronrad, indem die Zähne der Nahmen der Kämme bekommen. Die Kämme greifen dann in die Triebstücke des Trillings AB ein, welches die Stelle des Getriebes vertritt, und bey diesem Eingreifen sind die Kämme des Rades genöthigt an den Triebstöcken

nach der Richtung der Axe des Trillings vorbey zu gleiten, welches zu einer Reibung Anlaß giebt.

§. 157.

Ueberhaupt mag der Winkel, den die Axen zweyer Wellen bilden, wie immer beschaffen seyn, so wäre es wohl, um die Umdrehungsbewegung einer derselben der andern vermittelst zweyer Sternräder DEFG, EHIF mitzutheilen, und damit die Zähne nicht nach der Richtung der Axen von einander abgleiten, am vortheilhaftesten diesen Rädern die Form zweyer Abschnitte von den Kegeln DAE, EAH Fig. 73. zu geben, welche einerley Scheitel A haben, und deren Axen mit den der Wellen zusammen fallen; und ferner, daß die Zähne beyder Räder dergestalt geschnitten seyen, daß die Richtung ihrer Oberflächen durch das gemeinschaftliche Scheitel gehe.

§. 158.

Die Hebewinde ist ebenfalls eine Maschiene, welche auf die Rolle zurückgebracht werden kann.

Die einfache Hebewinde Fig. 74. besteht aus einer eisernen an einer ihrer Flächen mit Zähnen versehenen Stange, welche nach der Richtung ihrer Länge innerhalb eines Kastens DE beweglich ist. Die Zähne der Stange greifen in die des Getriebes C ein, welches man vermittelst einer Kurbel F um seine Axe bewegen kann. Die Zähne des Getriebes ziehen die der Stange mit, und bewirken hierdurch, daß die auf dem Kopfe A der Stange ruhende, oder vom Querhaken B erhaltene Last in die Höhe gehoben wird. Diese Maschiene ist also

nichts anders als ein Wellrad, und nimmt man an, daß die Richtung der Kraft auf dem Arm der Kurbel senkrecht ist, so wird sich beym Falle des Gleichgewichts die Kraft zur Last verhalten, wie der Halbmesser des Getriebes zum Halbmesser der Kurbel.

Bey der zusammengesetzten Hebewinde greifen die Zähne des ersten Getriebes in die eines mit Zähnen versehenen Rades, und die Zähne des Getriebes dieses letztern greifen in die der Stange ein. Hierdurch kann man eine Kraft in den Stand setzen einer sehr großen Last das Gleichgewicht zu halten. Dieser Fall kommt auf den des mit Zähnen versehenen Räderwerks zurück, und wir wollen uns über diesen Gegenstand nicht weiter ausdehnen.

§. 159.

Wenn zwey Kräfte an einer Rolle oder einem Räderwerke im Gleichgewichte sind, so kann man sie offenbar so betrachten, als wären sie an den äußern Punkten eines Hebels im Gleichgewicht, dessen Unterstützungspunkt in der Axe der Rolle oder des Räderwerks liegen würde; diese Kräfte werden sich also (§. 137.) umgekehrt wie die nach ihren Richtungen durchlaufenen Räume verhalten, wenn das Gleichgewicht um unendlich wenig gehoben wird.

Fünf-

Fünftes Kapitel.

Vom Gleichgewicht auf der schiefen Ebne.

§. 160.

Jede Ebne ABCD Fig. 75, welche mit der horizontalen Ebne ABEF einen Winkel bildet, der kein rechter ist, wird eine schiefe Ebne genannt.

§. 161.

Wenn man aus irgend einem auf dem Durchschnitte AB der schiefen und der horizontalen Ebne genommenen Punkt H zwey Gerade senkrecht führt, die eine HK in der horizontalen, und die andre HI in der schiefen Ebne, so ist der von den beyden senkrechten eingeschlossene Winkel IHK das Maaß der Neigung der Ebne. Die Ebne des Winkels IHK, welche durch zwey auf AB senkrechte Gerade geht, ist auf dieser Geraden AB senkrecht; sie ist also auf den beyden sich nach dieser Geraden schneidenden Ebnen ABCD und ABEF senkrecht. Diese Ebne ist also zu gleicher Zeit vertikal und auf der schiefen Ebne senkrecht.

§. 162.

Und umgekehrt wird jede Ebne, welche vertikal und zugleich auf der schiefen Ebne senkrecht ist, auf dem Durchschnitte AB der schiefen Ebne mit der horizontalen senkrecht seyen; die Geraden HI und HK, nach denen sie diese beyden letztern schneidet, sind also auch auf AB

senkrecht, und schließen mit einander einen Winkel IHK ein, welcher das Maaß der Neigung der Ebne ABCD gegen die horizontale Ebne ist.

§. 163.

Wenn man durch den Punkt I eine vertikale Linie IL legt, so wird diese Gerade in der Ebne des Winkels IHK bleiben; sie wird die horizontale Gerade HK, auf welcher sie senkrecht ist, schneiden, und solchergestallt ein rechtwinklichtes Dreyeck IHL bilden. Die Hypothenuse HI dieses Dreyecks wird die **Länge** der schiefen **Ebne**, die Seite IL wird die **Höhe** derselben, und die Seite HL wird die **Breite** der schiefen Ebne genannt.

§. 164.

Wenn ein Körper, welcher eine unbewegliche Ebne ABCD Fig. 76. in einem Punkt Q berührt, von einer einzigen Kraft P gedrückt wird, deren Richtung PQ 1) durch den Berührungspunkt Q geht, und 2) auf der Ebne senkrecht ist, so bleibt der Körper in Ruhe.

Denn man kann sich die Kraft P in dem Punkte Q ihrer Richtung angebracht denken. Da nun diese Richtung auf der Ebne, und folglich auf allen in dieser Ebne durch den Punkt Q gelegten Geraden QR, QS, QT senkrecht ist, so hat sie gegen alle diese Gerade einerley Lage; es ist also kein Grund vorhanden, warum sich der Punkt Q eher nach der einen als nach der andern derselben bewegen sollte; mithin bleibt dieser Punkt, und folglich der ganze Körper in Ruhe.

§. 165.

Die Bedingungen, welche wir eben aufgezählt haben, sind beyde nöthig, wenn der Körper in Ruhe bleiben soll; denn 1) wenn Fig. 77. die Richtung PI der Kraft nicht durch den Berührungspunkt geht, so verhindert nichts den auf dieser Richtung liegenden Punkt G des Körpers, sich der Ebne zu nähern, und der Körper muß folglich in Bewegung kommen. 2) Wenn die Richtung PQ der Kraft durch den Berührungspunkt geht, und nicht auf der Ebne senkrecht ist, so sey, indem wir uns diese Kraft noch immer im Punkte Q angebracht denken, ihre Richtung in QR verlängert und durch den Punkt Q sey die Gerade QS auf die Ebne senkrecht geführt; durch die beyden Geraden QR, QS sey eine Ebne gelegt, welche die erste Ebne ABCD nach einer Geraden HI schneiden wird, welche durch den Punkt Q geht.

Dieses vorausgesetzt, wird man, wenn die Kraft P durch den Theil QR ihrer Richtung vorgestellt, und das Parallelogramm QTRS vollendet wird, statt der Kraft P die beyden durch QS und QT vorgestellten Kräfte nehmen können. Nun wird zwar die Kraft QS, welche durch den Berührungspunkt geht, und deren Richtung auf der Ebne ABCD senkrecht ist, von dem Wiederstande dieser Ebne aufgehoben (§ 164.); aber nichts stellt sich der Wirkung der Kraft QT entgegen, deren Richtung der Ebne parallel ist; der Punkt Q wird sich also nach der Richtung QH bewegen, und der Körper kann nicht in Ruhe bleiben.

§. 166.

Hieraus folgt, daß wenn ein Körper, auf den bloß

die Schwere ihre Wirkung ausübt, auf der Ebne ABCD, die er in einem einzigen Punkt Q berührt, ruhig liegen bleibt, 1) der Schwerpunkt P dieses Körpers, und der Berührungspunkt Q in einerley vertikalen Linie liegen werden, 2) wird die Ebne ABCD horizontal seyn; denn da das Gewicht des Körpers als eine einzige in dessen Schwerpunkte angebrachte Kraft angesehen werden kann, so kann dieser Körper nicht in Ruhe bleiben, wofern nicht die Richtung dieser Kraft durch den Berührungspunkt geht, und auf der Ebne, auf welcher der Körper ruht, senkrecht ist.

§. 167.

Es folgt ferner, daß wenn ein von der bloßen Wirkung der Schwere getriebener Körper von einer schiefen Ebne ABCD Fig. 78. in einem einzigen seiner Punkte Q unterstützt wird, welcher Punkt sich in der durch seinen Schwerpunkt gelegten vertikalen Linie befindet, so muß dieser Körper auf der Ebne hinabzugleiten streben, und die Richtung QH, nach welcher der Punkt Q sich zu bewegen strebt, ist der Durchschnitt der Ebne ABCD mit der Ebne IHK, welche zu gleicher Zeit vertikal und auf der schiefen Ebne senkrecht ist.

§. 168.

Was wir eben von einem Körper gesagt haben, der von einer einzigen Kraft gegen eine Ebne gedrückt wird, läßt sich auch auf einen Körper anwenden, der gegen eine krumme Oberfläche AQB Fig. 80. gedrückt wird, die er nur in einem einzigen Punkte Q berührt; das

heißt, daß dieser Körper nicht in Ruhe bleiben kann, so lange nicht die Richtung der ihn treibenden Kraft durch den Punkt Q geht, und wofern sie nicht auf der krummen Oberfläche in diesem Punkte senkrecht ist; denn dieser Körper kann so angesehen werden, als würde er von der die krumme Oberfläche berührenden Ebne DE im Punkte Q unterstützt.

§. 169.

Man sieht also, daß wenn ein Hebel über seinen Unterstützungspunkt hinweggleiten kann, und in Ruhe erhalten werden soll, es nicht hinreichend ist, daß die Zusammengesetzte der an dem Hebel angebrachten Kräfte gegen den Unterstützungspunkt gerichtet sey; sondern es ist ferner nöthig, daß die Richtung dieser Zusammengesetzten in dem Punkte, worin sie die Unterlage trift, auf der Oberfläche des Hebels senkrecht sey.

§. 170.

Wenn ein von einer einzigen Kraft P Fig. 81. gegen eine unbewegliche Ebne ABCD getriebener Körper, von einem begränzten Theil UXYZ dieser Ebne unterstützt wird, so muß, wenn die Richtung PQ der Kraft diesen Theil in einem Punkte Q trift, und wenn sie zugleich auf der Ebne senkrecht ist, dieser Körper in Ruhe bleiben; denn wir haben (§. 164.) gesehen, daß wenn die Basis nur ein einziger Punkt Q wäre, der Körper in Ruhe bleiben würde, und die andern Unterstützungspunkte, welche die Basis darbiethet, können sie offenbar nicht aufheben.

Man kann wie im §. 65. beweisen, daß diese Bedingungen beyde nothwendig sind, damit der Körper in Ruhe bleiben soll; der Effekt der erstern ist, den Körper zu verhindern, sich nach einer Seite seiner Basis zu bewegen; und der Effekt der andern ist ihn abzuhalten, auf der Ebne ABCD fort zu gleiten.

§ 171.

Wenn der Körper anstatt in der Ebne von einer zusammenhängenden Grundfläche unterstützt zu werden, sie nur in einigen von einander abgesonderten Punkten berührt: so kann man diese Punkte als die Scheitel der Winkel einer vieleckigten Grundfläche betrachten, und der Körper ist in Ruhe, wenn die Richtung der ihn gegen die Ebne drückenden Kraft auf dieser Ebne senkrecht ist, und zu gleicher Zeit innerhalb des Polygons fällt.

Da nun das Gewicht eines Körpers als eine einzige in seinem Schwerpunkte P angebrachte Kraft betrachtet werden kann, deren Richtung vertikal ist, so sieht man 1) daß ein Körper, welcher mit seiner Grundfläche auf einer horizontalen Ebne ABCD aufliegt, Fig. 82, nicht in Ruhe bleiben kann, wofern nicht die durch seinen Schwerpunkt gelegte vertikale PQ irgend einen Punkt Q der Grundfläche trift; 2) daß wenn der Körper auf der Ebne in einer gewissen Anzahl abgesonderter Punkte U, X, Y ꝛc. . . . . aufliegt, er nicht in Ruhe bleiben kann, wofern nicht die durch seinen Schwerpunkt P gelegte vertikale PQ durch einen innerhalb des Polygons UXY gelegenen Punkt Q geht, welches gebil=

det wird, wenn man die äußern Unterstützungspunkte durch die Geraden UX, XY, YU verbindet.

§. 172.

Bisher haben wir vorausgesetzt, daß der von der Ebne unterstützte Körper von einer einzigen Kraft getrieben wird; es ist indessen einleuchtend, daß wenn der Körper von mehreren Kräften zugleich getrieben wird, er nicht in Ruhe bleiben kann, wofern nicht die Zusammengesetzte aller dieser Kräfte den vorhergehenden Bedingungen ein Genüge leistet, das heißt, wofern nicht die Richtung dieser Zusammengesetzten auf der Ebne senkrecht ist, und durch die Basis des Körpers geht. In diesem Falle ist also zur Ruhe des Körpers eine dritte Bedingung zu erfüllen, und diese Bedingung ist, daß alle auf ihn wirkende Kräfte eine Zusammengesetzte haben.

Die ganze Theorie des Gleichgewichts eines von einer beliebigen Anzahl Kräften gegen eine ihn unterstützende Ebne gedrückten Körpers besteht also in der Untersuchung der Richtungen und der Größen, welche diese Kräfte haben müssen, damit die eben vorgetragenen Bedingungen erfüllt werden. Wir werden uns begnügen, sie für einige einfache, und besonders für den Fall zu entwickeln, wo der Körper von zweyen Kräften gedrückt wird.

§. 173.

Es sey also LUZ ein in der Ebne ABCD von einer Grundfläche UXYZ unterstützter Körper, welcher zu glei-

cher Zeit von den beyden Kräften R, S gezogen wird. Nach dem Vorhergehenden ist also zur Ruhe des Körpers erforderlich, 1) daß die beyden Kräfte R, S eine Zusammengesetzte haben; nun aber können zwey Kräfte keine Zusammengesetzte haben, wofern nicht ihre Richtungen in einerley Ebne liegen (§ 29.); es müssen dadar 1) die Richtungen beyder Kräfte R, S in einerley Ebne liegen, und in einem gewissen Punkte N zusammen laufen.

2) Muß die Richtung PQ der Zusammengesetzten der beyden Kräfte R, S auf der Ebne ABCD senkrecht seyn; nun liegt die Zusammengesetzte zweyer Kräfte immer in der durch ihre Richtungen geführten Ebne; es muß also 2) die Ebne, in welcher die beyden Richtungen der Kräfte R, S liegen, auf der Ebne ABCD senkrecht seyn.

3) Muß die Richtung der Zusammengesetzten durch einen gewissen Punkt Q der Grundfläche gehen.

§. 174.

Hieraus folgt, daß wenn eine der beyden Kräfte, zum Beyspiel die Kraft R, das Gewicht des Körpers ist, welches man als im Schwerpunkte M angebracht betrachten kann, und dessen Richtung MR vertikal ist, der Körper auf der schiefen Ebne ABCD nicht in Ruhe bleiben kann, wofern nicht die Richtung NS der andern Kraft in einer durch den Schwerpunkt auf der schiefen Ebne senkrecht geführten vertikalen Ebne liegt, und wenn nicht überdieß die Richtung PQ der Zusammengesetzten der beyden Kräfte auf der schiefen Ebne senkrecht ist, und durch einen Punkt der Grundfläche des Körpers geht.

Wir wollen nun alle diese Bedingungen in Beziehung auf die Richtung der Kräfte als erfüllt voraussetzen, und die Verhältnisse aufsuchen, welche die beyden Kräfte R, S und die Last P der Ebne für den Fall des Gleichgewichts zu einander haben müssen.

§. 175.

Es sey also LXU Fig. 83. ein in der wiederstehenden Ebne HI von der Grundfläche UX unterstützter Körper, welcher auf dieser Ebne von den beyden Kräften R, S in Ruhe erhalten wird. Nachdem man die Richtungen dieser beyden Kräfte verlängert hat, bis sie einander in einem Punkte N schneiden, sey von diesem Punkte die Gerade NP auf die Ebne HI senkrecht geführt. Wir haben gesehen, daß diese Gerade die Richtung der Zusammengesetzten der beyden Kräfte R, S seyn wird. Stellt man nun diese Zusammengesetzte durch den Theil NE ihrer Richtung vor, und führt durch den Punkt E die Geraden EG, EF den Richtungen der Kräfte R, S parallel, wodurch das Parallelogramm NFEG vollendet wird, so werden die Seiten NF, NG die Größen der Kräfte R, S vorstellen. Bezeichnet man also die Belastung der Ebne, welche der Zusammengesetzten gleich ist, durch P, so wird man haben

$$R : S : P = NF : NG \text{ oder } FE : NE.$$

Um die Verhältnisse dieser drey Kräfte in Größen ausgedrückt zu erhalten, welche von der Konstruktion des Parallelogramms NFEG unabhängig sind, bemerke man, daß sich im Dreyecke NEF die Seiten zu einander

wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel verhalten, oder daß man hat

$$NF : FE : EN = \sin NEF : \sin FNE : \sin NFE;$$

mithin hat man

$$R : S : P = \sin NEF : \sin FNE : \sin NFE.$$

Nun werden diese drey Winkel von den Richtungen der drey Kräfte R, S, P gebildet; mithin verhält sich jede dieser Kräfte wie der Sinus des Winkels, welchen die Richtungen der beyden andern einschließen.

Man sieht also, daß wenn von den sechs Stükken, welche man bey diesem Gleichgewichte betrachten kann, und welche in den Richtungen der drey Kräfte und in ihren Größen bestehen, drey gegeben sind, die übrigen drey in allen den Fällen gefunden werden können, in welchen sich von den im Dreyecke NEF vorkommenden sechs Stücken, nehmlich den drey Seiten und drey Winkeln, aus den drey gegebenen analogen, die übrigen drey finden lassen.

§. 176.

Wenn eine der Kräfte, zum Beyspiel die Kraft R Fig. 84. das Gewicht des Körpers ist, dessen Richtung vertikal ist und durch den Schwerpunkt M geht, wenn ferner die Richtung der Kraft S, welche den Körper auf der schiefen Ebne im Gleichgewichte hält, dieser Ebne parallel ist, und man denkt sich die Grundlinie HK und die Höhe KI der schiefen Ebne geführt, so werden die rechtwinklichten Dreyecke NFE, IHK einander ähnlich seyn, weil die Winkel NFE, HIK, deren Seiten stück-

weise parallel sind, einander gleich seyn werden, und man wird haben

NF : FE : EN = HI : IK : KH,

man wird also auch haben

R : S : P = HI : IK : KH.

In diesem Falle verhält sich also das Gewicht des Körpers zur Kraft, welche ihm das Gleichgewicht hält, wie sich die Länge der schiefen Ebne zu ihrer Höhe verhält.

§. 177.

Nimmt man noch immer an, daß Fig. 85. die Kraft R das Gewicht des Körpers sey, so werden, wenn die Richtung der Kraft S horizontal, und folglich der Grundlinie HK der schiefen Ebne parallel ist, die rechtwinklichten Dreyecke NFE, HIK noch immer ähnlich seyn, weil die Seiten des einen auf den Seiten des andern senkrecht sind, und man wird haben

NF : FE : EN = HK : KI : IH.

Man wird also auch haben

R : S : P = HK : KI : IH.

Mithin verhält es alsdann das Gewicht des Körpers zur Kraft, welche ihm das Gleichgewicht hält, wie die Grundlinie der schiefen Ebne sich zu ihrer Höhe verhält.

§. 178.

Wir wollen nun das Gleichgewicht eines von zweyen schiefen Ebnen unterstützten Körpers betrachten. Es sey Fig. 86. M ein der bloßen Wirkung der Schwere

unterworfener Körper, welcher von zweyen in der Geraden AB sich schneidenden schiefen Ebnen ABCD, ABEF unterstützt wird. Es seyen ferner H, I die Punkte, in denen der Körper die beyden Ebnen berührt, und GR die durch seinen Schwerpunkt geführte vertikale, welche folglich die Richtung seines Gewichts seyn wird. Es ist klar, daß dieser Körper nicht in Ruhe bleiben kann, wofern sich nicht das Gewicht des Körpers R in zwey andre an diesem Körper angebrachte Kräfte P, Q zerlegen läßt, welche vom Wiederstande der beyden Ebnen aufgehoben werden; oder, welches auf eins hinaus kommt, wofern nicht die Richtungen der beyden Kräfte P, Q durch die Unterstützungspunkte H, I gehen, und jede auf ihrer korrespondirenden Ebne senkrecht ist; nun müssen die Richtung einer Kraft und die ihrer beyden Zusammensetzenden in einerley Ebne liegen, und nothwendigerweise einander in einem und demselben Punkte schneiden; wenn also der Körper M zwischen den beyden schiefen Ebnen in Ruhe bleiben soll, so müssen die von den Unterstützungspunkten H, I auf beyde schiefe Ebnen senkrecht geführten Geraden IG, HG beyde mit der durch den Schwerpunkt des Körpers geführten vertikalen in einerley Ebne liegen, und diese vertikale in einem und demselben Punkt G treffen.

§. 179.

Hieraus folgt, daß wenn ein Körper M zwischen zweyen schiefen Ebnen unabhängig von der Lage des Körpers in Ruhe bleiben soll, die Ebnen der Bedingung ein Genüge thun müssen, daß die Gerade AB ihres

Durchschnitts horizontal sey; denn die Ebne IGH, welche die vertikale GK, und die auf den beyden schiefen Ebnen senkrechten IG, HG enthalten muß, ist vertikal und zugleich auf beyden schiefen Ebnen senkrecht; es müssen daher umgekehrt die beyden schiefen Ebnen auf der vertikalen Ebne IGH senkrecht seyn; mithin muß die Gerade AB ihres Durchschnitts auf eben dieser Ebne senkrecht, und folglich horizontal seyn.

§. 180.

Wenn diese Bedingungen, welche die gegenseitigen Lagen des Körpers und der beyden schiefen Ebnen zum Gegenstande haben, als erfüllt angenommen werden, so bemerke man, um das Verhältniß des Gewichts R zu den Pressungen Q, R zu finden, welche die beyden Ebnen erleiden, daß die vertikale und auf den schiefen Ebnen senkrechte Ebne IGH, in welcher die Winkel liegen, welche diese beyden Ebnen mit dem Horizont bilden, alles das enthalten, was zur Aufgabe erforderlich ist, und daß man sich daher begnügen kann, sie nur wie in der Fig. 87. zu betrachten. Es seyen daher AD, AF die Durchschnitte der vertikalen Ebne IGH mit den beyden schiefen Ebnen: so werden diese Geraden mit der horizontalen UZ, oder mit jeder andern horizontalen HY Winkel bilden, welche die Neigungen der beyden Ebnen messen werden. Dieses vorausgesetzt wird man, wenn das Gewicht des Körpers durch den Theil GR seiner Richtung vorgestellt, und das Parallelogramm GPRQ vollendet wird, diese proportionale Reihe haben

$$R : P : Q = GR : RQ : QG.$$

Nun geben die Dreyecke GQR, HAY, deren Seiten wechselweise auf einander senkrecht sind

$$GR : RQ : QG = YH : YA : AH;$$

man wird also auch haben

$$R : P : Q = YH : YA : AH.$$

Oder endlich, weil die Seiten des Dreyecks HAY den Sinus der gegenüber stehenden Winkel proportional sind, wird man auch haben

$$R : P : Q = \sin YAH : \sin AHY : \sin HYA.$$

Das heißt, wenn man das Gewicht des Körpers durch den Sinus des von beyden schiefen Ebnen eingeschlossenen Winkels darstellt, so werden sich die Pressungen, welche diese beyden schiefen Ebnen erleiden, umgekehrt wie die Sinus der Winkel verhalten, welche diese Ebnen mit dem Horizont bilden.

§. 181.

Wenn endlich ein Körper in dreyen Punkten A, B, C Fig. 88. von dreyen schiefen Ebnen unterstützt wird, so ist klar, daß dieser Körper nicht in Ruhe bleiben kann, wofern nicht sein Gewicht P, dessen Richtung DP vertikal ist, und durch den Schwerpunkt des Körpers geht, in drey andre Kräfte Q, R, S zerlegt werden kann, welche vom Wiederstande der schiefen Ebnen aufgehoben werden; das heißt, wofern nicht die Richtungen der drey Kräfte Q, R, S durch die drey Unterstützungspunkte gehen, und jede derselben auf ihrer korrespondirenden schiefen Ebne senkrecht ist.

§. 182.

Damit also der Körper in Ruhe bleiben soll, ist es nöthig, daß sein Gewicht P in zwey andre Kräfte Q, X dergestalt zerlegt werden kann, daß die Richtung der erstern Q durch einen der Unterstützungspunkte A gehe, und auf der durch diesen Punkt geführten schiefen Ebne senkrecht sey; die andre Kraft X kann wiederum an und für sich in zwey andre R, S zerlegt werden, deren Richtungen durch die beyden andern Unterstützungspunkte B, C gehen, und auf den beyden andern schiefen Ebnen respektiv senkrecht sind.

Man sieht also, daß in diesem Falle nur erforderlich ist, daß die auf den schiefen Ebnen durch die Berührungspunkte A, B, C geführten senkrechten, alle drey in einem und demselben Punkte zusammenstoßen, wenn auch nicht alle drey die durch den Schwerpunkt des Körpers geführte vertikale treffen.

§. 183.

Lehrsatz.

Wenn ein Körper ohne Schwere auf einer schiefen Ebne BC Fig. 89. in einem einzigen Punkte C aufliegt, und zwischen den beyden Kräften P, Q im Gleichgewichte ist, so werden sich diese Kräfte umgekehrt wie die Räume verhalten, welche sie nach ihren Richtungen durchlaufen würden, wenn das Gleichgewicht um unendlich wenig gestört wird.

Beweis.

Da die beyden Kräfte P, Q im Gleichgewichte sind,

so muß ihre Zusammengesetzte auf der schiefen Ebne senkrecht seyn und durch den Unterstützungspunkt C gehen (§. 172.); hieraus folgt, daß die Richtungen dieser Kräfte in einem gewissen Punkt G zusammenlaufen müssen (§. 29.), und daß die Gerade CG auf der schiefen Ebne senkrecht seyn muß. Dieses vorausgesetzt, seyen vom Punkte C auf die Richtungen der Kräfte P, Q die senkrechten CE, CF gefällt, so ist klar, daß der Winkel ECF, welcher als unveränderlich angenommen wird, als ein Winkelhebel angesehen werden kann, an dessen äußern Enden die beyden Kräfte um den Punkt C im Gleichgewicht angebracht sind; man kann also wie im §. 137. beweisen, daß sich die Kräfte umgekehrt wie die Räume verhalten, welche sie nach ihren Richtungen durchlaufen würden, wenn das Gleichgewicht um unendlich wenig gehoben würde.

Von der Schraube.

§. 184.

Es werde ein Cylinder ABCD Fig. 90. von einem Faden AGHIK .... dergestalt umwunden, daß die von der Richtung des Fadens mit den auf der Oberfläche des Cylinders zur Axe parallel geführten Geraden gebildeten Winkel FLO, FMP, FNQ .... allenthalben gleich seyn: so wird die von diesem Faden auf der Oberfläche des Cylinders beschriebene Curve eine Schraubenlinie genannt.

§. 185.

Hieraus folgt, daß wenn die Oberfläche des Cylin-

ders zerlegt, und, wie in abcd in eine Ebne ausgedehnt wird, 1) die Zerlegung ah' oder hk' einer Wendung der Schraubenlinie eine gerade Linie seyn wird, weil die Winkel, welche diese Linie mit allen Geraden, welche so wie ef der Seite ad parallel geführt sind, bildet, einander gleich sind. 2) Wird diese Zerlegung ah' einer Wendung der Schraubenlinie die Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyecks abh' seyn, dessen Grundlinie ab dem Umkreise der Grundfläche des Cylinders gleich ist, und dessen Höhe bh' der Höhe der Schraubengänge gleich seyn wird, welche nach dem Abstande einer Wendung von der nächstfolgenden bestimmt wird.

3) Da alle Hypothenusen ah', hk' einander parallel sind, so werden die rechtwinklichten Dreyecke abh', hh'k' .... ꝛc. alle gleich und ähnlich seyn. Mithin sind die Zwischenräume LM, MN .... zwischen zweyen auf einander folgenden Wendungen des Schraubenganges auf der cylindrischen Oberfläche einander gleich.

§. 186.

Dieses vorausgesetzt kann die Schraube als ein befestigter Cylinder angesehen werden, dessen Oberfläche von einer befestigten Hervorragung nach einer Schraubenlinie umwunden ist. Gewöhnlich ist die Form der Hervorragung von der Art, daß wenn sie von einer durch die Axe des Cylinders (der Spindel) geführten Ebne geschnitten wird, ihr Durchschnitt ein gleichschenklichtes Dreyeck wird, wie in Fig. 91. Bey den großen Schrauben aber, die mit vieler Sorgfalt ausgeführt werden, ist der Schnitt der Hervorragung gewöhnlich rechteckigt,

wie in Fig. 92. Der beständige Zwischenraum AB zwischen zweyen auf einander folgenden Wendungen der Hervorragung wird die Höhe des Schraubenganges genannt.

§. 187.

Ein andrer Körper MN, in dessen cylindrische Höhlung Schraubengänge von einerley Höhe und Umfange mit denen der Spindel angebracht sind, so daß die Erhöhungen der einen in die Vertiefungen der andern, und umgekehrt einpassen, heißt die Schraubenmutter. Durch diese Anordnung kann sich die Spindel in ihrer Schraubenmutter herumdrehen, sie kann dieß aber nicht thun, ohne sich nach der Richtung ihrer Axe zu bewegen; und bey einer ganzen Wendung wird sie sich in der Richtung ihrer Axe um eine der Höhe des Schraubenganges gleiche Größe bewegen.

§. 188.

Zuweilen ist die Spindel fest und die Schraubenmutter bewegt sich um dieselbe; alsdann rückt bey jeder Wendung die Schraubenmutter um eine der Schraubenganges Höhe gleiche Größe am Spindel fort.

§. 189.

Die Schraube kann angewendet werden Lasten zu heben, oder einen Wiederstand zu überwältigen; man bringt sie aber gewöhnlich an, wenn man große Pressungen bewirken will. In dieser Absicht wird am Ende einer Stange, welche queer durch den Kopf der Spindel Fig. 92. oder der Schraubenmutter Fig. 91. geht, je

nachdem das eine oder das andre dieser beyden Stücke beweglich ist, eine Kraft Q angebracht; und indem diese Kraft das Stück, an welchem sie angebracht ist, zu drehen nöthigt, bringt sie den Kopf der Spindel der Schraubenmutter oder umgekehrt, näher, und bewirkt, daß die zwischen diesen beyden Stücken liegenden Gegenstände zusammengepreßt werden.

Wir haben nun zur Absicht, indem wir die Reibung außer Acht lassen, das Verhältniß der Kraft Q zu der ihr das Gleichgewicht haltenden Last P zu finden, wenn sie sich der Bewegung des beweglichen Theils nach einer der Axe der Spindel parallelen Richtung entgegen setzt; und da der Effekt völlig derselbe ist, die Spindel mag sich um ihre Schraubenmutter oder die Schraubenmutter um die Spindel bewegen, so wollen wir uns begnügen, diesen letztern Fall zu untersuchen.

§. 190.

Wenn Fig. 91. die Schraube nach einer vertikalen Richtung befestigt ist, so wollen wir uns vorstellen, daß die Schraubenmutter der Wirkung der Schwere überlassen, und wenn man will, noch überdieß von einem fremden Gewichte belastet ist; es ist klar, daß sie umdrehend hinabsteigen, und daß sie alle Schraubenlinien der Spindel durchlaufen, indem sie sich auf ihnen wie auf einer schiefen Ebne bewegen wird. Es ist ferner klar, daß man diesem Effekt entgegen wirken kann, wenn man die Schraubenmutter verhindert sich um ihre Spindel zu bewegen, und folglich, wenn man am äußern Ende der Stange FV eine Kraft Q anbringt, welche auf dieser

Stange senkrecht gerichtet ist, und in einer auf der Axe der Spindel senkrechten Ebne liegt.

§. 191.

Wir wollen vorläufig annehmen, daß die Schraubenmutter auf der Oberfläche des Schraubenganges nur in einem einzigen Punkte aufliege, so wird dieser Punkt während der Bewegung der Schraubenmutter eine Schraubenlinie beschreiben, deren Höhe mit der der Spindel einerley seyn wird, und welche man sich auf der Oberfläche eines Cylinders gezogen denken kann, dessen Halbmesser dem Abstande des beschreibenden Punktes von der Axe der Spindel gleich ist. Es seyen also ABCD Fig. 93. der Cylinder, EFGHI . . . die erwähnte Schraubenlinie, und M der sie beschreibende Punkt der Schraubenmutter. Es sey XY die Tangente der Schraubenlinie im Punkte M; durch einen Punkt Y dieser Tangente sey die vertikale YZ der Höhe des Schraubenganges gleich, und in der vertikalen Ebne XYZ die horizontale Gerade XZ geführt; so ist klar, daß diese letztere Gerade dem Umfange der Grundfläche des Cylinders ABCD (§. 184.), oder dem Umkreise des Kreises gleich seyn wird, dessen Halbmesser CF ist, und wir wollen sie durch Umkr. CF bezeichnen.

Dieses vorausgesetzt, wird der Punkt M, welchen man als mit dem ganzen Gewicht P der Schraubenmutter belastet ansehen kann, an die Schraubenlinie so angedrückt werden, als läge er auf der schiefen Ebne XY; soll diesem also vermittelst einer Kraft R, welche unmittelbar daran angebracht ist, und welche der XZ parallel

wirkt, das Gleichgewicht gehalten werden, so muß sich §. 177. diese Kraft R zur Last P verhalten, wie sich die Höhe der schiefen Ebne zu ihrer Breite verhält, oder man muß haben

R : P = YZ : Umkr. CF.

Wenn man aber anstatt eine Kraft R unmittelbar im Punkte M anzubringen, eine Kraft Q Fig. 91. anbringt, deren Richtung der der erstern parallel ist, und welche am Ende einer Stange CV wirkt, so muß diese Kraft auf den Punkt M dieselbe Wirkung hervorbringen als die Kraft R, und in dieser Hinsicht müssen sich diese Kräfte umgekehrt wie ihre Entfernungen von der Axe des Cylinders verhalten, das heißt man muß haben

Q : R = CF : CV,

oder, weil die Zirkelumkreise sich wie ihre Halbmesser verhalten, muß man haben

Q : R = Umkr. CF : Umkr. CV.

Multiplicirt man also diese Proportion und die erstere nach der Ordnung, so wird man haben

Q : P = YZ : Umkr. CV.

Das heißt die Kraft, welche die Schraubenmutter im Gleichgewichte hält, verhält sich zum Gewichte der Schraubenmutter, wie sich die Höhe des Schraubenganges zum Umkreise des Kreises verhält, welchen die Kraft zu beschreiben strebt.

§. 192.

Da der Abstand des Punktes M von der Axe der Spindel nicht in dieser Proportion vorkommt, so folgt, daß, dieser Abstand mag seyn, welcher er wolle, das

Verhältniß des Gewichts P der Schraubenmutter zur Last Q, welche ihr das Gleichgewicht hält, immer dasselbe bleibt, wofern diese Kraft immer in demselben Punkte angebracht ist.

§. 193.

Wenn der Schraubengang der Schraubenmutter auf dem der Spindel in verschiedenen von der Axe der Spindel ungleich entfernten Punkten aufliegt, wie dieß gewöhnlich der Fall ist, so kann das ganze Gewicht der Schraubenmutter als in Partialgewichte zerlegt angesehen werden, deren jedes in einem der Unterstützungspunkte angebracht ist. Nun hat die im Punkte V angebrachte Partialkraft, welche einem dieser Gewichte insbesondre das Gleichgewicht hält, zu diesem Gewichte das beständige Verhältniß von der Höhe des Schraubenganges zu dem Umkreise, welchen die Kraft zu beschreiben strebt. Mithin hat die Summe der Partialgewichte, oder das ganze Gewicht der Schraubenmutter zur Summe der Partialkräfte, oder zur ganzen Kraft Q dasselbe Verhältniß.

§. 194.

Hieraus folgt 1) daß die Kraft, welche an der Schraubenmutter der Axe der Spindel parallel angebracht werden muß, um der Kraft Q, welche die Schraubenmutter zu drehen strebt das Gleichgewicht zu halten, sich zu dieser Kraft verhält wie der Umkreis des Kreises, den diese Kraft zu beschreiben strebt, sich zur Schraubenganges Höhe verhält.

2) Daß bey einem und demselben Spindel der Effekt der Kraft Q desto größer wird, je entfernter diese Kraft von der Axe des Spindels angebracht ist.

3) Daß bey zwey verschiedenen Spindeln, an denen aber die Kraft in gleichem Abstande von der Axe angebracht ist, ihr Effekt desto beträchtlicher ist, je kleiner die Schraubenganges Höhe ist. Das heißt, je dichter die Schraubengänge sind, desto mehr Effekt hat die Kraft nach der Richtung der Axe zu pressen.

§. 195.

Zuweilen bringt man auch die Schraube an, um einem Sternrade Fig. 94. eine Umdrehungsbewegung um seine Welle zu geben. Man macht dann die Schraubenganges Höhe DE einer der Abtheilungen des Sternrades gleich, und ordnet sie dergestalt, daß ihre Axe in der Ebne des Rades liegt, und daß ihr Schraubengang in die Zähne eingreift. Dieses vorausgesetzt, wird, wenn eine Kraft Q die Schraube vermittelst einer Kurbel FG um ihre Axe dreht, der Schraubengang die auf einander folgenden Zähne mitziehen, und das Rad ungeachtet der Last P, welche sich seiner Umdrehungsbewegung entgegen setzt, zu bewegen nöthigen.

Wenn die Schraube zu diesem Behufe angewendet wird, so heißt sie eine **Schraube ohne Ende.**

Um das Verhältniß der Kraft Q zur Last P für den Fall des Gleichgewichts zu haben, wollen wir annehmen, daß die Last ein Gewicht sey, welches an einem um die Welle des Rades gewundenen Seile aufgehängt ist. Vermöge dieses Gewichts drückt der Zahn des Rades

den Schraubengang nach einer der Axe HF parallelen Richtung, und bezeichnet man diese Pressung durch R, so hat man (§. 150.)

$$P : R = AC : AB.$$

Nun kann die Pressung des Zahns als diejenige angesehen werden, welche eine von einer Kraft R der Axe der Spindel parallel getriebene Schraubenmutter ausüben würde; man hat also für den Fall des Gleichgewichts

$$R : Q = \text{Umkr. } FG : DE;$$

multiplicirt man also die beyden Proportionen nach der Ordnung, so hat man

$$P : Q = AC \times \text{Umkr. } FG : AB \times DE.$$

Das heißt, die Last verhält sich zur Kraft, wie das Produkt aus dem Halbmesser des Rades in den von der Kurbel beschriebenen Umkreis, sich zum Produkte aus dem Halbmesser der Welle des Rades in die Schraubenganges Höhe verhält.

Vom Keil.

§. 196.

Der Keil Fig. 95. ist ein dreyeckigtes Prisma ABCDEF, welches man vermittelst seiner Schärfe EF in einen Spalt hinein treibt, um die beyden Theile eines Körpers von einander zu trennen. Man bedient sich desselben auch um große Pressungen hervorzubringen, oder um Seile zu spannen.

Die Messer, die Aexte, die Grabstichel, und überhaupt alle schneidende und eindringende Instrumente können als Keile angesehen werden.

Die Fläche ABCD, auf welche man aufschlägt, um den Keil hinein zu treiben, oder welche die Wirkung der Kraft aufnimmt, wird der Rücken des Keils genannt. Die Kante EF, vermittelst welcher der Keil einzudringen anfängt, heißt die Schärfe; und den Flächen AFED, BFEC, durch welche er die Körper, die er von einander trennen soll, preßt, giebt man den Nahmen der Seiten. Oder, weil man gewohnt ist den Keil durch sein dreyeckiges Profil ABF vorzustellen, wird die Basis AB des Dreyecks der Rücken des Keils genannt; AF und BF sind dessen Seiten.

§. 197.

Man ist gewohnt vorauszusetzen, daß die Richtung der Kraft auf dem Rücken des Keils senkrecht ist, weil man gewöhnlich den Keil hinein treibt, indem man auf dessen Rücken mit einem Hammer oder mit jedem andern Gegenstande aufschlägt, welcher mit ihm keinen Zusammenhang hat; und wenn auch in diesem Falle die Richtung CD des Stoßes Fig. 96. nicht auf der Fläche des Rükkens senkrecht ist, so zerfällt die Wirkung in zwey andre CH, CE, von denen die erstere, welche dem Rücken des Keils parallel ist, keinen andern Effekt haben kann als den Hammer abgleiten zu machen, und deren zweyte, welche auf den Rücken AB senkrecht ist, die einzige ist, welche sich auf dem Keil übertragen läßt, und zu dem Effekt, den man beabsichtigt, beyträgt. Wenn indessen die Kraft am Keil vermittelst eines Seils angebracht wäre, dessen befestigter Punkt nicht abgleiten kann, so muß man, wenn diese Kraft betrachtet wird, zugleich ihre Richtung in Erwägung ziehen.

§. 198.

Es seyen C, D Fig. 97. zwey durch ein Keil ABF abgesonderte Punkte, welche von einem an ihnen befestigten Seile CD, welches sich ihrem Auseinanderweichen entgegen setzt, zurückgehalten werden; wir wollen ferner annehmen, daß diese Punkte gegen eine wiederstehende Ebne gedrückt werden, welche sie verhindert, sich nach einer auf dem Seile senkrechten Richtung zu bewegen, und daß eine auf dem Rücken des Keils AB senkrecht angebrachte Kraft P ein Bestreben äußere sie zu trennen, und sie nach der Richtung der Länge dieses Seils zu bewegen. Dieses vorausgesetzt, so kommt es nur noch darauf an zu bestimmen 1) die Spannung, welche hieraus in dem Seile CD erfolgt, 2) die Kraft, welche in einem der beyden Punkte C, D angebracht werden muß, um sie zu verhinoern sich nach der Richtung des Seils zu bewegen; 3) die Pressung, welche jeder dieser Punkte auf die ihm wiederstehende Ebne ausübt.

Es ist zuvörderst zu merken, daß wenn die Richtung der Kraft P nicht von der Art ist, daß sie in zwey andre Q, R zerlegt werden kann, deren Richtungen durch die Punkte C, D gehen und auf den Seiten AF, BF senkrecht sind, der Keil sich zwischen den Punkten C, D drehen wird, bis diese Bedingung erfüllt ist, und daß dieß dann allein bewirken wird, daß die Kraft P ihren ganzen Effekt hervorbringe. Wir werden also ferner annehmen, daß nachdem man durch die Punkte C, D die Geraden CE, DE auf die Seiten des Keils senkrecht geführt hat, der Durchschnittspunkt E dieser beyden Geraden auf der Richtung der Kraft P liegen wird.

Diesem zufolge wird sich die Kraft P in zwey andre Kräfte Q, R zerlegen lassen, welche nach EC, ED wirken, und stellt man diese Kraft durch den Theil EX ihrer Richtung vor und vollendet das Parallelogramm EZXY, so wird man haben

$$P : Q : R = EX : EY : EZ \text{ oder } YX.$$

Oder, weil die beyden Dreyecke EYX und ABF, deren Seiten auf einander senkrecht stehen, ähnlich sind, wird man haben

$$P : Q : R = AB : AF : BF,$$

und folglich

$$Q = \frac{P \times AF}{AB}$$

$$R = \frac{P \times BF}{AB}.$$

Da sich der Punkt C wegen des Wiederstandes der Ebne, auf welcher er aufliegt, nicht nach der Richtung ECH bewegen kann, so wird sich die daran angebrachte Kraft Q in zwey andre zerfällen lassen, von denen die eine, welche nach der auf dem Seile senkrechten Geraden CI gerichtet ist, vom Wiederstande der Ebne aufgehoben wird; und deren zweyte, welche nach der Richtung der Verlängerung von DC wirkt, dazu angewendet seyn wird, das Seil zu spannen. Macht man also CH = EY und vollendet das Rechteck CGHI, so werden die beyden Zusammensetzenden der Kraft Q durch CI und CG dargestellt seyn, und man wird haben

$$Q : \text{Kraft } CI : \text{Kraft } CG = CH : CI : CG,$$

und folglich

$$\text{Kraft } CI = \frac{Q \times CI}{CH}$$

$$\text{Kraft } CG = \frac{Q \times CG}{CH}.$$

Oder, wenn man statt Q seinen im Vorhergehenden gefundenen Werth setzt, wird man haben

$$\text{Kraft } CI = \frac{P \times AF \times CI}{AB \times CH}$$

$$\text{Kraft } CG = \frac{P \times AF \times CG}{AB \times CH}.$$

Eben so wird, wenn man auf der Verlängerung von ED, DL = EZ setzt, und das Rechteck DKLM vollendet, dessen Seite DK auf der Verlängerung von CD, und dessen Seite DM auf CD senkrecht ist, die Kraft R in zwey andre DM, DK zerlegt werden können, deren erstere vom Wiederstande der Ebne aufgehoben wird, und deren zweyte gänzlich angewendet seyn wird aufs Seil zu wirken, und man wird eben so finden

$$\text{Kraft } DM = \frac{R \times DM}{DL} = \frac{P \times BF \times DM}{AB \times DL}$$

$$\text{Kraft } DK = \frac{R \times DK}{DL} = \frac{P \times BF \times DK}{AB \times DL}.$$

Das Seil CD wird also von der Kraft CG nach der einen, und von der Kraft DK nach der entgegengesetzten Richtung gezogen.

Nun ist, wenn ein Seil von zweyen ungleichen Kräften nach entgegengesetzter Richtung gezogen wird, die Spannung, welche es erleidet, immer der kleinern dieser beyden Kräfte gleich; denn wenn beyde Kräfte

einander gleich sind, so ist eine derselben das Maaß der Spannung des Seils; und wenn sie ungleich sind, so kann der Ueberschuß der größern über die kleinern, welchem nichts entgegen wirkt, zur Spannung des Seils nichts beytragen, und er hat keinen andern Effekt als es nach der Richtung seiner Länge zu ziehen.

Es wird also 1) die Spannung des Seils CD der kleinern der beyden Kräfte CG, DK gleich seyn.

2) Wird das Seil nach der Länge und Richtung der größern der beyden Kräfte CG, DK gezogen; so daß man, um dieser Bewegung entgegen zu wirken, in einem der beyden Punkte C, D eine der Differenz dieser beyden Kräfte gleiche Kraft anbringen muß, deren Richtung der der größern gerade entgegengesetzt ist.

3) Werden von den beyden Pressungen, welche die beyden Punkte C, D auf die sie haltende Ebne ausüben, die erste der Kraft CI, und die zweyte der Kraft DM gleich seyn.

§. 199.

Wenn die Seiten AF, BF des Keils Fig. 98. gleich sind, wodurch der Rücken AB dem Seile, welches die beyden Punkte C, D zusammen hält, parallel, und zugleich die Richtung der Kraft P auf der Mitte von AB senkrecht ist, so wird sich 1) der Keil nicht drehen, weil die aus den Punkten C, D auf die Seiten des Keils geführten senkrechten CE, DE einander in einem Punkte E der Richtung der Kraft schneiden werden.

2) Da alles von beyden Seiten gleich ist, so werden die Kräfte CG, DK einander gleich seyn, und jede

derselben wird die Spannung des Seils CD messen. 3) Wenn man vom Punkte F auf den Rücken des Keils die senkrechte FN fällt, so werden die Dreyecke CGH, BNF, deren Seiten auf einander senkrecht sind, ähnlich seyn und geben

$$CH : CG = BF : FN.$$

Nun hat man

$$Q : \text{Kraft } CG = CH : CG,$$

folglich

$$Q : \text{Kraft } CG = BF : FN;$$

man hat ferner

$$P : \text{Kraft } CG = AB : BF.$$

Multiplicirt man diese beyden Proportionen nach der Ordnung, so wird man haben

$$P : \text{Kraft } CG = AB : FN.$$

Das heißt, daß sich in diesem Falle die Kraft P zur Spannung des Seils CD verhalten wird, wie der Rükken des Keils sich zu seiner Höhe verhält.

Wir werden die Theorie des Keils nicht auf den Gebrauch anwenden, den man von diesen Instrment machen kann, um Körper zu spalten, weil unter diesem letztern Umstande der zu überwindende Wiederstand immer unbekannt ist, und es daher unnütz wäre, das Verhältniß dieses Wiederstandes zu der ihm das Gleichgewicht haltenden Kraft zu finden.

Lehnsatz.

§. 200.

Wenn man von den Scheiteln B, C Fig. 99. zweyer Winkel eines Dreyecks auf die gegenüber ste-

henden Seiten die senkrechten BE, CD fällt, so werden sich diese senkrechten umgekehrt wie die Seiten verhalten, auf welche sie gefällt werden, das heißt, man wird haben

$$BE : CD = AB : AC.$$

Beweis.

Betrachtet man AB als die Basis des Dreyecks, so wird CD dessen Höhe, und der Flächeninhalt des Dreyecks wird seyn $\frac{AB \times CD}{2}$. Eben so wird, wenn AC für die Basis genommen wird, der Flächeninhalt seyn $\frac{AC \times BE}{2}$; man wird also die beyden gleichen Produkte $AC \times BE = AB \times CD$ haben, welche diese Proportion geben

$$BE : CD = AB : AC.$$

Lehrsatz.

§. 201.

Wenn zwey Kräfte P, Q Fig. 100 an den Seiten AB, AC eines Keils angebracht sind, dessen dritte Seite BC von einer wiederstehenden Ebne MN unterstützt wird; und diese beyden Kräfte vermittelst des Wiederstandes der Ebne im Gleichgewicht sind: so werden sie sich zu einander umgekehrt wie die Räume verhalten, welche sie nach ihren Richtungen durchlaufen würden, wenn das Gleichgewicht um unendlich wenig gehoben wird.

Beweis.

Da die Kräfte P, Q im Gleichgewichte sind, so müssen ihre Richtungen auf den Seiten des Keils, an denen sie angebracht sind, senkrecht seyn (§. 165.). Nun wollen wir annehmen, daß vermittelst einer Aufhebung des Gleichgewichts der Keil auf der wiederstehenden Ebne abgleite, und die unendlich nahe gelegene Lage abc annehme; es sey ferner die Richtung QE verlängert, bis sie die ac in e trift: so sind offenbar die kleinen Geraden Ee, Dd die Räume, welche die Kräfte nach ihren Richtungen durchlaufen haben werden. Endlich sey Aa gezogen, es seyen ferner CA, ba verlängert, bis sie einander in einem Punkte F schneiden, und von den Punkten A, a seyen auf die Verlängerungen die senkrechten AH, aG gefällt, so wird man offenbar haben Ee = Ga und Dd = AH.

Dieses vorausgesetzt, werden die Kräfte P, Q, welche im Gleichgewichte sind, sich wie die Seiten des Keils verhalten, an denen sie angebracht sind, man wird also haben (§. 198.)

$$P : Q = AB : AC;$$

und wegen der ähnlichen Dreyecke ABC, FaA

$$P : Q = Fa : FA;$$

mithin wird man haben (§. 100.)

$$P : Q = aG : AH,$$

und folglich

$$P : Q = Ee : Dd.$$

§. 202.

Wir haben gesehen, daß der analoge Satz beym Gleich-

Gleichgewicht aller Maschienen, welche wir bisher betrachtet haben, seine Richtigkeit hat. Befolgt man eben diesen Weg, so kann man direkt beweisen, daß wenn zwey Kräfte einander vermittelst zweyer Unterstützungspunkte, welche irgend eine Maschiene darbiethet, das Gleichgewicht halten, so verhalten sie sich umgekehrt wie die Räume, welche sie nach ihren Richtungen durchlaufen würden, wenn das Gleichgewicht um unendlich wenig gehoben wird. Vermittelst dieses Satzes wird es leicht seyn, in der Ausübung das Verhältniß zu finden, welche die an einer vorgelegten Maschiene angebrachte Kraft und Last zu einander haben müssen, damit diese Kräfte im Gleichgewichte seyen, wenn man die Reibung und andre Hindernisse der Bewegung außer Acht läßt.

Zusätze.

Zu §. 74.

Damit der Anfänger bey den vorliegenden Fällen mit Leichtigkeit zu beurtheilen wisse, welche Momente und welche Kräfte addirt, und wiederum, welche dieser Größen abgezogen werden müssen, wird folgende Betrachtung nicht undienlich seyn.

Es sey GF Fig. 32. eine unbiegsame Gerade, auf welche die Kräfte P, Q, R, S senkrecht wirken, und die wir uns im Mittelpunkte D der Momente dergestallt unterstützt denken wollen, daß sich diese Linie um den Punkt D zwar herum bewegen, aber nicht weichen kann. Da diese Gerade unbiegsam ist, so kann kein einziger Punkt F derselben in Bewegung kommen, ohne zugleich alle andre Punkte dieser Geraden mit in Bewegung zu setzen. Es strebt daher jede an dieser Geraden angebrachte Kraft jedem Punkt derselben, wie F, eine Bewegung entweder oberwärts oder unterwärts beyzubringen. Haben daher zwey Kräfte auf irgend einen Punkt dieser Geraden einen entgegesetzten Effekt, das heißt, strebt die eine Kraft einen gewissen Punkt derselben aufwärts und die andre ihn unterwärts zu bewegen, so werden diese Kräfte auch auf jeden andern Punkt dieser Geraden einen entgegengesetzten Effekt haben. Um da-

her zu untersuchen, ob zwey Kräfte auf eine gegebene Gerade einerley oder eine entgegengesetzte Wirkung hervorbringen, hat man bloß den Effekt dieser Kräfte auf einen einzigen Punkt dieser Geraden zu berücksichtigen.

Untersuchen wir nun auf diese Art den Effekt der Kräfte P, Q, R, S Fig. 32., so wird sich ergeben, daß die beyden Kräfte P, Q den Punkt F unterwärts zu bewegen streben, anstatt daß die Kräfte R, S, indem sie den Theil DG dieser Geraden unterwärts ziehen, hierdurch den Punkt F aufwärts zu bewegen streben.

In Fig. 33. strebt die Kraft Q sowohl als die Kraft P den Punkt F unterwärts zu bewegen; die Kräfte R, S hingegen streben diesen Punkt aufwärts zu ziehen.

Stellen wir eben diese Betrachtungen über den Punkt E Fig. 34. an, so wird offenbar nicht nur die Kraft P, sondern auch die Kraft R, welche den Theil DG aufwärts zieht, hierdurch den Punkt E unterwärts zu bewegen streben; die Kräfte Q, S hingegen ziehen diesen Punkt aufwärts.

Wir sehen also, daß eine aufwärts gerichtete Kraft mit einer unterwärts ziehenden einerley Wirkung hervorbringen kann, wenn beyde von verschiedenen Seiten des Unterstützungspunktes angebracht sind.

In diesem Sinne ist der Ausdruck: die Summe der Momente der nach einerley Seite wirkenden Kräfte zu nehmen, und die Ausdrücke für DL erläutern dieses. Die Summe der Kräfte selbst wird nach

den Pressungen bestimmt, den sie auf den Unterstützungspunkt ausüben; und es ist klar, daß alle unterwärts gerichtete Kräfte den Druck auf die Unterlage nach unten vermehren, dahingegen die aufwärts gerichteten Kräfte diesen Druck vermindern; sie mögen übrigens von einerley oder von verschiedenen Seiten des Unterstützungspunkten liegen.

Man sieht, daß auf diese Art im dritten Ausdruck für DL das Moment der Kraft R, welche den Punkt E unterwärts zu bewegen strebt, zum Momente der Kraft P hinzugesetzt werden muß; die Kraft R selbst aber, welche den Druck der Kraft P auf die Unterlage vermindert, muß im Nenner abgezogen werden.

H.

Bayerische Staatsbibliothek München

Druckfehler und Verbesserungen.

Seite	19	Zeile	1	statt den Punkt lies den Punkt E
—	23	—	13	st. die l. die Richtung der
—	23	—	14	st. entspringende Zusammengesetzte l. entsprin- genden Zusammengesetzten
—	31	—	22	st. den l. denn
—	33	—	4	st. Kröften l. Kräften
—	36	—	2	st. Paralleiepipedums l. Parallelepipedums
—	36	—	8	st. AE l. AE des Parallelepipedums
—	39	—	21	st. C l. C der Richtung
—	43	—	12	st. B l. B Fig. 17.
—	52	—	10	st. X l. Y
—	53	—	11	st. Fig. 4. l. Fig. 24.
—	53	—	13	st. dieser l. der
—	55	—	10	st. Bc l. Cc
—	57	—	19	st. g l. g'
—	59	—	1	st. $Q \times DC = R \times DB$ l. $Q \times DB = R \times DC$
—	80	—	7	st. FC l. FG
—	80	—	28	st. LM, LM l. LM, LN.
—	86	—	9	st. Ff l. Ff'
—	87	—	20	st. unendlich l. unendliche
—	91	—	23	st. der Summe l. der ganzen Summe
—	94	—	3	st. ABCDE l. ABCDE Fig. 47.
—	96	—	16	st. BA''' l. BB'''
—	100	—	21	st. würde man l. würde, wenn man
—	100	—	22	st. vergrößern müssen, l. vermehrte, dieß noch nicht hinreichend seyn
—	105	—	5	st. AD l. AB
—	110	—	3	st. keine l. nur
—	113	—	3	st. der l. die

Seite 114	Zeile 22	st. DEN l. DMN
— 120	— 4	st. wir l. wird
— 121	— 3	st. einen l. einem
— 121	— 28	st. Ef l. Ff
— 124	— 1	st. daß l. dann wird
— 124	— 2	st. bleibe l. bleiben
— 133	— 16	st. AB l. A, B
— 133	— 28	st. FS l. ES
— 137	— 2	st. GDE l. CDE
— 139	— 23	st. Gewichts l. Gleichgewichts
— 139	— 29	st. Rollen l. Räder
— 147	— 8	st. Wenn l. Wenn Fig. 78.
— 148	— 1	st. ABCD l. ABCD Fig. 79.
— 159	— 12	st. nur. l. nicht

Taf. 1.

Fig. 7.
R
D
A
C
B
Q
P
Fig. 13.
S
d
D
N
l
X
M
H
K
C
c
R
I
E
h
G
B
e
V
b
T
Q
Fig. 22.
K
b
B
a
A
g
G
c
C
d
D
N
L
P
S
Y
Q
R

5

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Monge, Gaspard,

Gaspard Monge's Anfangsgründe der Statik

Berlin 1806

Math.a. 328 s
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081345-6